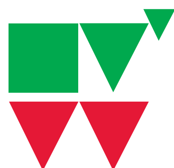
# EUCLIDES



**VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR**

INTERVIEW MET PAUL DRIJVERS
BREUKEN OP DE HELLING
TORENS NAAST DE TAFELBERG
UITDAGENDE PROBLEMEN
EEN π-SHIRT, BETER LAAT DAN NOOIT!
VASTGEROEST

# NR.6



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | MEI 2015

# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 6

## IN DIT NUMMER

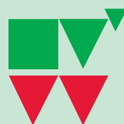




De coverafbeelding is van Rinus Roelofs: Een met gelijkzijdige driehoeken opgebouwde cilinder, gedecoreerd met vismotieven van Escher. Website *www.rinusroelofs.nl*

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN







## Kort vooraf

Met schooljaar 2015-2016 in zicht komt ook het moment dat we de vernieuwde examenprogramma's landelijk gaan uitvoeren. Een aantal collega's was daar in de pilotfase al mee bezig, maar nu zullen we allemaal aan de bak moeten. Door het hele land draaien de nascholingscursussen op volle toeren. Zelf heb ik in het najaar Analytische Meetkunde bezocht en deze weken mag ik aanschuiven bij Wiskundige Denkactiviteiten. Een cursus volgen aan het einde van een lesdag valt niet altijd mee, maar bij de TU Delft maken ze het heel aantrekkelijk door een enthousiast team docenten voor de klas te zetten en tussen de presentaties door een uurtje uit te trekken voor het avondeten.
Heel slim bedacht, want dat vinden we eigenlijk het leukst, dan is er namelijk uitgebreid de gelegenheid om met de diverse collega's ervaringen uit te wisselen. Net als veel leerlingen wil ik op zo'n avond graag achteroverleunen en consumeren: 'Laat een ander het mij maar vertellen.' Maar dat was niet de bedoeling; we moesten gaan speed-daten. Nu is dat een werkvorm die ik graag in de klas uitvoer, omdat het een enorm effectieve manier is om leerlingen aan het werk te krijgen. Maar toen ik zelf aan de bak moest, voelde ik een behoorlijke weerstand; ik had helemaal geen zin om mijn veilig gekozen plek in het lokaal te verlaten. Maar eenmaal aan de slag bleek maar weer hoe sterk deze methode is, en voor ik het wist, was er een uur voorbij en hadden we in verschillende samenstellingen aardig wat denkactiviteiten opgelost. Me weer even realiseren hoe het is om een leerling te zijn, maakt dat ik kritisch blijf kijken naar mijn eigen lessen. Zo levert een nascholing meer op dan alleen maar de aangekondigde lesstof.

Marjanne de Nijs

# INTERVIEW MET PAUL DRIJVERS

Annelien Jonkman

## HOOGLERAAR IN DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

'Mevrouw, mijn oma kon geen wiskunde, mijn moeder kon geen wiskunde en ik heb ook al twee jaar geen voldoende voor wiskunde gehaald. Het zit gewoon niet in mijn genen, dus ik wens u veel succes met mij', vertelt Maaike als ik haar in 3 havo voor het eerst in de klas krijg.



Fotograaf:
Ben van Ernich

Het afbreken van een dergelijke muur van wanhoop is waar velen van ons dagelijks voor staan. Het is dus goed dat de Universiteit van Utrecht Paul Drijvers per 1 juni 2014 heeft benoemd tot hoogleraar in de Didactiek van de Wiskunde bij het Freudenthal Instituut. Op 21 mei 2015 houdt hij zijn oratie. Naast het hoogleraarschap is Paul ook werkzaam als toetsdeskundige bij het Cito. Hij is internationaal een zeer gewaardeerde en erkende autoriteit op het gebied van wiskundedidactiek. Hij vindt zijn benoeming 'na 10 jaar malaise' goed nieuws. 'Jarenlang is er bezuinigd op hoogleraren vakdidactiek, die bijvoorbeeld na hun pensionering niet zijn opgevolgd. De onderzoeksformatie voor wiskundedidactiek nadert in Nederland de kritische ondergrens, zoals onlangs in een rapport voor Platform Wiskunde Nederland is geconstateerd.[1] Ik wil wetenschappelijk onderbouwde kennis graag verzamelen en vertalen naar iets waar de wiskundedocent wat aan heeft.' Goed nieuws waar de redactie van dit blad meer van wil weten, dus wij maken een afspraak voor een interview.

### Ontmoeting

Bij mijn eerste interview als nieuwe redacteur van *Euclides* word ik vergezeld door Heiner Wind. Wij lopen samen het stationsgebouw van Arnhem uit op weg naar het Cito waar wij om 17.00 uur met Paul hebben afgesproken. Wij moeten pasjes opspelden en twee poortjes door. Na een paar minuten komt er een man op ons aflopen met een fitte, ontspannen en jeugdige uitstraling, anders dan ik mij op grond van Googleresultaten had voorgesteld. Wij schudden elkaar de hand en lopen door het aantrekkelijke driehoekige gebouw naar een ronde spreekkamer, waar wij – na koffie en thee gehaald te hebben uit 'de lekkerste automaat van het gebouw' - met z'n drieën aan tafel gaan zitten.

### Bindende factor

Paul vertelt dat hij graag een bindende factor, een boegbeeld wil zijn voor de wiskundedidactiek in Nederland. Zijn onderzoeksinteresse 'gaat vooral uit naar de rol van ICT in het wiskundeonderwijs, de didactiek van de algebra en de professionele ontwikkeling van docenten'. Hij wil graag concreet iets voor docenten betekenen, handvatten aanreiken waar wij wat aan hebben. Zijn werk voor de *Nieuwe Wiskrant*, bijdragen aan het boek *Wat a is, dat kun je niet weten* en het *Handboek wiskundedidactiek*, dat hij samen met Anne van Streun en Bert Zwaneveld redigeerde, zijn daar voorbeelden van. 'Wie is je doelgroep? Waar praat je tegen en welke taal heb je nodig om die doelgroep te bereiken? Dat is voor alle docenten wiskunde lastig', zegt hij. Voor zijn oratie stelt hij zichzelf deze vragen ook. Collegawetenschappers moeten in hem een gelijke herkennen, maar ook voor zijn familie wil hij het boeiend houden.

> 'DE ESSENTIE OVEREIND HOUDEN, DAT IS DIDACTIEK'

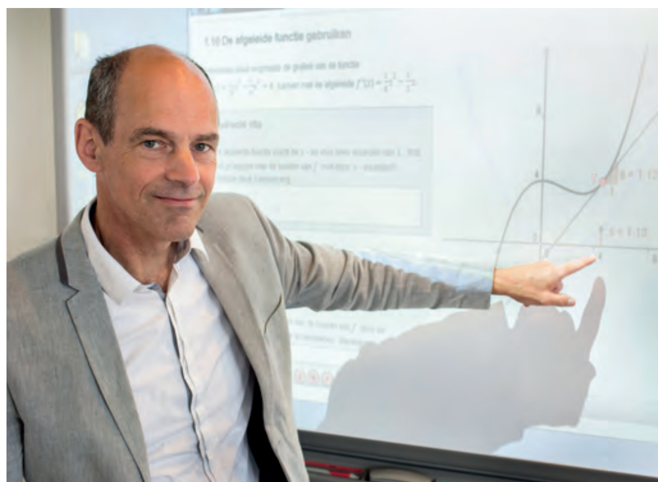
Als goede ontwikkelingen noemt hij de middelen die OC&W beschikbaar heeft gesteld voor vernieuwing en verbetering van het onderwijs en de professionele ontwikkeling van leraren. Het lerarenregister vindt hij ook een goede zaak. Niet zozeer dat leraren zich moeten registreren, alswel dat zij worden aangemoedigd om zich te blijven scholen. En er is begin januari aan de Technische Universiteit Eindhoven ook een hoogleraar STEM Education (Science, Technology, Engineering and Mathematics) benoemd in de persoon van Birgit Pepin.

## Docenten die indruk maken

Paul zal de wiskundedocent uit zijn tweede klas gymnasium niet meer vergeten. 'Hij heeft mij meer geleerd dan elke docent die ik later kreeg. En hij heeft meer bijgedragen aan het feit dat ik wiskunde ben gaan studeren dan wie ook.' Aan de universiteit werd wiskunde voor hem te weinig als menselijke activiteit gebracht: 'Waarom doe je dit, waar wil je heen, hoe denk je hierover?' De stof werd teveel als een kant-en-klare, abstracte berg kennis gepresenteerd, waar je je als student doorheen moest zien te eten. Hij vindt het belangrijk dat docenten hun leerlingen en studenten leren dat je met wiskunde echt iets kunt: 'Niet alleen in de vervolgopleiding of het beroep, maar ook in het gewone leven. Het idee dat je wiskunde kunt maken, dat je er aan kunt beginnen, dat het mensenwerk is.'

## De essentie overeind houden

Voordat ik die dag naar Arnhem afreisde, had ik in verschillende klassen vier onderwerpen behandeld: ontbinden in factoren, goniometrie, combinatoriek en de normale verdeling. Ik vroeg Paul of hij een paar voorbeelden kon geven van een goede didactische aanpak voor deze onderwerpen. Hij pakt een papiertje, begint te tekenen en te vertellen. Wervend haalt hij er van alles bij: de lego van zijn zoon, *mister Bean* en de kansdichtheidsfunctie van de normale verdeling die vanwege het feit dat zowel het getal π als e er in voorkomen voor leerlingen iets magisch zou kunnen hebben. Deze leraar neemt mij voor zich in, ik begrijp hem, wiskunde is inderdaad mensenwerk. 'De essentie overeind houden, dat is didactiek', zegt hij.



Ik begin over zijn belangstelling voor de toepassing van ICT in het wiskundeonderwijs en vertel dat wij – net als zoveel andere scholen – laptopklassen zijn gestart, maar dat er voor ons vak nog te weinig *content* beschikbaar is om aan zo'n laptop in de wiskundeles iets te hebben. Paul vertelt over de Digitale Wiskundeomgeving[2] van het Freudenthal Instituut en over de toets-oefenomgeving *Facet* die door CvTE wordt ontwikkeld. Beide communiceren nu ook met een computeralgebrasysteem (*Reduce* respectievelijk *Maxima*). Dit betekent dat bijvoorbeeld in de niet zo heel verre toekomst toetsen digitaal beoordeeld zullen kunnen worden en leerlingen bij het oplossen van algebraïsche vraagstukken bij elke tussenstap feedback kunnen krijgen. 'Tegelijkertijd moeten wij op elke ict-ontwikkeling wel steeds kritisch blijven. Het digitale schoolbord heeft er hier en daar voor gezorgd dat docenten voor dat mooie bord bleven staan en weer klassikaal zijn gaan lesgeven, terwijl men verwachtte dat ICT juist tot interactief onderwijs zou leiden.'

Zijn doel is om wetenschappelijk gefundeerde kennis om te zetten naar iets waar de docent wat aan heeft. Of hem dat op grote schaal gaat lukken, zal de tijd leren. Maar voor hernieuwde moed en inspiratie kan ik iedereen een gesprek met deze man aanraden.

## Noten


[1] Verhoef, N., Drijvers, P., Bakker, A., & Konings, T. (2014). *Tussen wal en schip: wiskundig-didactisch onderwijsonderzoek in Nederland.* Rapport Onderwijsonderzoekscommissie. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

[2] Zie *www.fisme.uu.nl/dwo*


## Over de auteur


Annelien Jonkman is werkzaam op het Sancta Maria Lyceum te Haarlem en het Herbert Vissers college in Nieuw-Vennep, schrijft columns voor het *Onderwijsblad* van de AOb en is redacteur van *Euclides*. E-mailadres: *annelien.jonkman@gmail.com*

# WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

## Gecombineerde klassen behouden

Er komen steeds minder middelbare scholen met echte brugklassen, zoals vmbo/havo of havo/vwo. Een groot deel van de Tweede Kamer vindt dat een probleem en wil dat er voldoende ruimte blijft voor gecombineerde klassen. Middelbare scholen vragen aan de basisscholen een eenduidig schooladvies: of vmbo of havo of vwo. Gemengde schooladviezen worden vaak niet meer geaccepteerd.
Het probleem zit volgens de Tweede Kamerleden bij de afrekencultuur. Als een deel van de leerlingen afzakt van bijvoorbeeld vwo naar havo, levert het een minpunt op van de onderwijsinspectie. Deze cultuur moet stoppen, vinden de Kamerleden. De angst voor een negatief oordeel van de onderwijsinspectie is toegenomen, doordat in plaats van de CITO-toets nu het advies van de basisschool de onderwijskeuze bepaalt. Dat versterkt de roep om duidelijke en veilige schooladviezen. Omdat de nieuwe regels pas dit schooljaar zijn ingegaan, vindt staatssecretaris Dekker het vooralsnog te vroeg om in te grijpen. Bron: NOS via *www.primaonderwijs/vo*

## Minder tijdelijke contracten in het onderwijs

Scholen moeten het aantal tijdelijke contracten verder terugdringen. Ze moeten naast de invalspools en onderlinge samenwerking andere manieren bedenken om de vervanging van docenten te regelen. Dat schrijft staatssecretaris Sander Dekker van Onderwijs in een brief aan de Kamer. Schoolbesturen van zowel primair als voortgezet onderwijs hebben de afgelopen vijf jaar minder vaste contracten of tijdelijke contracten met uitzicht op een vaste baan gegeven. Reden hiervoor zijn de financiën, maar ook het beperken van de arbeidsrechtelijke risico's. De brief met bijlage is te vinden op *www.rijksoverheid.nl/ministeries/ocw/documenten-en-publicaties/kamerstukken/2015/02/02/kamerbrief-over-rapport-flexibele-arbeid-in-primair-en-voortgezet-onderwijs.html*
Bron: *www.primaonderwijs/vo*

## Bijzondere pi-dag

Menig wiskundedocent zal via zijn of haar Facebook-account op 14 maart het bericht doorgestuurd hebben gekregen van de website *I fucking love science*. Niet alleen was het π-dag, een dag waar in Nederland vooral mensen met een wiskundige achtergrond bij stilstaan, het was ook nog eens een hele bijzondere! De 14e maart 2015 om 9:26:53 uur is op zijn Amerikaans genoteerd 3,14 15 926 53, en dat getal zult u zeker herkennen. Heeft u er op dat tijdstip aan gedacht? Voorlopig krijgt u die kans niet meer, want deze tiencijferige bijzonderheid doet zich maar eens in de 100 jaar voor. In de Verenigde Staten geniet π-dag redelijke bekendheid, misschien omdat het schrijven van de datum met de maand voorop daar de gewoonte is, of misschien omdat er weer een reden is om *pie* te eten. Toch zijn er bij ons ook steeds meer activiteiten op 14 maart die met π te maken hebben. Zo was er dit jaar een Pi-diner, een Pi-evenement van en voor *Geocachers* en de lancering van de website *www.pi-dag.nl*. Wie weet burgert π-dag ook hier in....




## Nederlandse puzzel in de New York Times

Henk Tijms, Nederlands wiskundige aan de VU in Amsterdam schreef een puzzel in de New York Times. De puzzel op het gebied van kansrekening is een echte uitdaging, zie *http://wordplay.blogs.nytimes.com/2015/02/09/tijms/?_r=1*
Bron: nieuwsrubriek Website NVvW

## Monsterlijke en umbrale maneschijn

Het Monster is een abstract object wat in zijn eenvoudigste vorm bestaat in een ruimte met 196.833 dimensies. Eind jaren '70 kwam het getal 196.834 tevoorschijn bij een modulaire functie. Dit leidde tot het 'Monsterlijke maneschijnvermoeden' dat er een verband zou bestaan tussen beide objecten. Het vermoeden bleek juist, hetgeen werd bewezen door Richard Borcherds die daarvoor in 1998 de Fieldsmedal ontving. Een soortgelijk vermoeden werd in 2012 ontdekt door John Duncan, Miranda Cheng en Jeffrey Harvey. Het ging nu om de sporadische symmetriegroep M24 en de zogenaamde 'mock-modulaire vormen'. Schaduwfuncties van deze vormen bleken onmisbaar bij deze ontdekking. Umbra is Latijn voor schaduw, vandaar dat dit vermoeden de naam 'umbrale maneschijn' kreeg. Onlangs is dit vermoeden bewezen door Ken Ono. Mogelijk leidt dit een beter inzicht in de snaartheorie. Cheng gaat aan de Universiteit van Amsterdam een onderzoeksgroep leiden om dit verder te onderzoeken. Bron: *NRC*

# NL VERSUS CH

Alex van den Brandhof

Alex van den Brandhof geeft wiskunde op een gymnasium in Zwitserland. Een docent daar heeft veel meer autonomie dan zijn Nederlandse collega.

Wie in Zwitserland een klaslokaal binnenloopt tijdens een wiskundeles, ziet niet veel verschillen met het Nederlandse onderwijs. De docent legt wat theorie uit, bespreekt een sommetje en laat de leerlingen zelf wat werken. Hooguit doet de inrichting van het klaslokaal wat ouderwets aan: een krijtbord en een overheadprojector behoren in Zwitserland tot de standaarduitrusting van elk lokaal (althans, in de scholen die ik ken, maar ik moet toegeven dat dat er niet zo veel zijn). Beamers hangen alleen in enkele lokalen waarop je kunt intekenen (wie het eerst komt, het eerst maalt). Of het begrip digibord bij de Zwitsers al is doorgedrongen, weet ik niet; in elk geval heb ik ze hier nog niet gezien. (Aan Heinrich Heine wordt de uitspraak 'Als de wereld vergaat, ga ik naar Nederland, want daar gebeurt alles altijd vijftig jaar later' toegekend, maar ik geloof dat qua onderwijs Nederland gerust mag worden vervangen door Zwitserland.)

## Geen centraal examen

Interessanter dan de overeenkomsten zijn de verschillen tussen beide landen in het wiskundeonderwijs. Het grootste verschil is misschien wel – en dat geldt niet alleen voor het vak wiskunde – de mate van vrijheid om het onderwijs in te richten. Grof gezegd gebeurt in Nederland op elke school hetzelfde. Via *Getal & Ruimte* wordt voor de Nederlandse leerling de weg naar het centraal examen uitgestippeld. In Zwitserland kent elk kanton zijn eigen wetten, en daarin vormt het onderwijs geen uitzondering. In het ene kanton duurt het gymnasium vijf jaar, in het andere vier. In het ene kanton doet 30% van alle scholieren het gymnasium, in het andere slechts 15%. In het ene kanton moet een leraar per week 23 lessen van 45 minuten geven voor een volledige baan, in het andere maar 21. In het ene kanton verdient een leraar duizend frank meer per maand dan zijn collega elders. Een kantonaal examen is er niet (om nog maar te zwijgen van een landelijk examen, dat moge duidelijk zijn). Elke school stelt zijn eigen examen samen, en hoewel ik het niet heb onderzocht, zou ik er niet raar van opkijken als er zelfs scholen zijn waarbinnen verschillende klassen verschillende examens krijgen. Voor zover ik weet, heeft wél elke school in Zwitserland naast een schriftelijk examen ook een mondeling examen wiskunde. Wel of geen grafische rekenmachines? Ook op dit punt kan elke school zelf beslissen. Het vanzelfsprekende gevolg van deze solitaire houding per school is dat de verschillen tussen scholen onderling relatief groot zijn. Je kunt je vraagtekens zetten bij de wenselijkheid hiervan, daar elk gymnasiumdiploma wél een toegangsbiljet voor de universiteit is. Toch hoor je Zwitsers niet zeggen dat zoiets onbillijk is – het hoort bij de cultuur van het land, net als dat het volstrekt normaal is dat de belasting in het kanton Zug tot tien keer zo laag is als in een ander kanton.



Alex van den Brandhof (meest links) met een van zijn klassen

## Eigen lesmateriaal

Van boekenlijsten hebben ze in Zwitserland nog nooit gehoord – laat staan van boekenfondsen. Elke docent bepaalt zelf met welk materiaal hij werkt. De meesten schrijven hun eigen teksten. Dat is misschien niet efficiënt, maar op die manier haal je wel het beste uit goede docenten, die er geen trek in hebben zich allerlei regels te laten voorschrijven. Het is toch ook niet voor niets dat het op elke universiteit óók zo gaat: toen ik wiskunde studeerde, hoefde ik zelden een boek aan te schaffen; meestal kocht ik voor een tientje een door de docent zelf geschreven dictaat.

Verboden is het in Zwitserland overigens niet, werken met een leerboek. In dat geval zeg je tijdens de eerste les van het schooljaar tegen je klas: 'We werken met dit en dat boek, hier is het ISBN-nummer, zorg ervoor dat je het binnen veertien dagen in huis hebt.' Zo kan het dus zomaar zijn dat de ene klas steeds maar weer een kopietje uitgedeeld krijgt van zijn docent, terwijl een parallelklas het hele jaar door uit één en hetzelfde boek werkt. Enig gemopper ('de leerlingen in klas 2a hebben het veel makkelijker!') heb ik nog nooit gehoord, van leerlingen noch van ouders.

Is het dan niet vreemd, dat ze in de ene klas heel andere dingen leren dan in de andere? Zo is het nu ook weer niet. Voor elk leerjaar is er een A4'tje waarop de onderwerpen geformuleerd staan die er behandeld moeten worden. Zo staan er op het A4'tje van de tweede klas bijvoorbeeld 'stelling van Pythagoras' en 'tweedegraads-

vergelijkingen'. In principe is – in elk geval binnen één school en in zekere zin ook per kanton – het programma dus vastgesteld. Maar de weg naar het einddoel is volkomen vrij.
Zo'n programma blijft jaren onveranderd, anders dus dan in Nederland, waar de kansrekening erin gaat en een paar jaar later er weer uit, waar bewijzen in de meetkunde na een paar jaar vervangen worden door analytische meetkunde, enzovoort. Als leraar blijf je zo bezig: heb je je net die vlakke meetkunde eigen gemaakt (geen wiskundige die dat onvoorbereid kan doceren; in een wiskundestudie komt het in elk geval niet aan bod, omdat het in het moderne onderzoek nauwelijks relevant is), wordt het weer afgeschaft. Zo is het maken van eigen lesmateriaal – wat ik op zichzelf een mooi ding vind – wel heel onaantrekkelijk.

### Wiskunde A B C D

In Nederland werden in de jaren tachtig van de vorige eeuw de vakken wiskunde A en wiskunde B ingevoerd; tegenwoordig bestaan ook nog C en D. Ik geloof niet dat er een land in de wereld is dat het Nederlandse voorbeeld heeft gevolgd. In elk geval kent Zwitserland maar één *Mathematik*, en dat is een verplicht eindexamenvak (in het hele land, dat dan weer wel). Dat kan redelijk rampzalig uitpakken. Elke leerling die in Nederland voor Wiskunde A of C zou kiezen, moet zich in Zwitserland door de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening heenworstelen. Zowel zwakke als begaafde leerlingen zijn gebaat bij homogene groepen en een daarop afgestemd programma. Wat dat betreft kan Zwitserland, net als veel andere landen, een voorbeeld nemen aan Nederland. Maar laat dat programma dan wel minstens een decennium staan.

### Over de auteur

Alex van den Brandhof gaf tot 2010 les op het Vossiusgymnasium in Amsterdam en werkt tegenwoordig op Gymnasium Leonhard in Basel. Daarnaast is hij wetenschapsjournalist en eindredacteur van *Pythagoras*.
E-mailadres: *brandhof@gmail.com*

# KLEINE DIDACTIEK

## DEZE TAART SMAAKT NAAR MEER!

Marcel Voorhoeve

In het vorige nummer van *Euclides* schreef Marjan Botke, als lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW, een kleine didactiek. Deze keer neemt een ander lid van de werkgroep de honneurs waar. Marcel Voorhoeve laat zien hoe hij op speelse wijze kennis test.




De gong is net gegaan en de eerste leerlingen druppelen binnen. Ik leg de taartpunten neer: voor elk tweetal leerlingen één. Als boek en schrift op tafel liggen, gaan de leerlingen vanzelf aan de slag, want ze weten dat er maar kort tijd is om per tweetal zoveel mogelijk taartpunten op te lossen. Na een paar minuten deel ik de antwoorden uit. Niet ieder groepje heeft de zes opgaven af, maar nu is het moment aangebroken dat de leerlingen zelf nakijken, verbeteren en op de verzamellijst het aantal behaalde punten noteren: maximaal 6, want iedere opgave is óf goed óf fout, er is geen tussenweg. Kort kom ik op de problemen bij enkele taartpunten klassikaal terug. Ten slotte meld ik nog een keer: ‘De antwoorden zijn vanavond ook op de elo te vinden. Oefen wat je moeilijk vindt of wat is weggezakt. En bekijk voor de toets van volgende week nog even de taartpunten 30 t/m 37!’ En daarna, zo’n 5 minuten na de gong, gaan we verder met de les.
Leerlingen vinden het prettig dat zij via de taartpunten worden geconfronteerd met wat ze wel en niet weten en kunnen. En samenwerken en ontdekken dat je buurman iets beter kan, draagt bij aan het besef dat ook voor jou herhalen en oefenen belangrijk is. Het competitie-element versterkt dit: het is leuk fors punten te scoren en aan het eind van het schooljaar een echte taart te ontvangen.

Ik probeer zinvolle en ‘lekkere’ taarten samen te stellen: een korte opdracht om een vaardigheid te oefenen, herhalingsopdrachten over leerstof die van belang is bij de start van een nieuw hoofdstuk, onderdelen die bij een toets nog niet goed gingen. Regelmatig serveer ik rekentaartpunten: opdrachten die in de rekentoets voorkomen of rekenvaardigheid toetsen. Als vanzelf zijn leerlingen ermee bezig. Als ik in de ochtendkrant een wiskundig artikeltje of een mooie context tegenkom, druk ik deze af en toe op het taartenblad af en stel er een vraag over.
Als docent daagt de taart mij uit er een smakelijk en zinvol product van te maken. Voor de leerlingen zijn de taarten een automatische start van de wiskundeles. Kortom: een recept waar leerling én docent enthousiast over zijn.

Voor meer voorbeelden van taartpunten
 *vakbladeuclides.nl/906voorhoeve*

### Over de auteur

Marcel Voorhoeve is docent wiskunde en conrector op het St-Gregorius College en Gerrit Rietveld College te Utrecht en lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW. E-mailadres: *m.voorhoeve@worldonline.nl*.
LinkedIn: *http://nl.linkedin.com/in/marcelvoorhoeve*

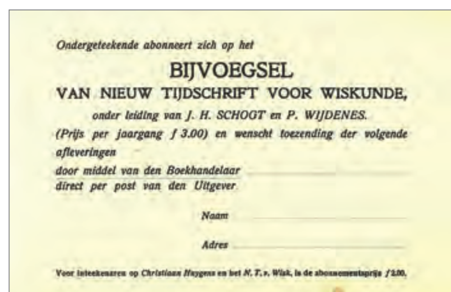
# GETUIGEN

## *EUCLIDES*

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.





*Ondergeteekende abonneert zich op het*

**BIJVOEGSEL**

**VAN NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE,**

*onder leiding van J. H. SCHOGT en P. WIJDENES.*

*(Prijs per jaargang f 3.00) en wenscht toezending der volgende afleveringen*

*door middel van den Boekhandelaar* ____________

*direct per post van den Uitgever*

*Naam* ____________

*Adres* ____________

Voor inteekenaren op *Christiaan Huygens* en het *N. T. v. Wisk*, is de abonnementsprijs *f* 2.00.

figuur 1 Bestelkaart *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (1924)

Het vaktijdschrift dat u in uw handen houdt, bestaat negentig jaar. Zoals mensen in de loop van hun leven veranderen, zo is ook dit tijdschrift gedurende zijn bestaan geëvolueerd tot wat het nu is. De huidige ambitie van de redactie om het onmisbare vakblad voor de hedendaagse wiskundedocent te bieden, is relatief jong. Oorspronkelijk was dit tijdschrift een heel ander tijdschrift. Als bron voor de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in Nederland is *Euclides* een fantastisch tijdschrift, dat tal van aanknopingspunten biedt voor onderzoek. Voor wiskundedocenten staan ook de oude nummers vol met inspirerende ideeën. Dat het sinds kort digitaal beschikbaar is, is dus zowel een opsteker voor de jarige vereniging als een zegen voor alle wiskundedocenten en onderwijshistorici.

Oorspronkelijk verscheen *Euclides* in 1924 als een bijvoegsel voor de abonnees van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Dat tijdschrift was in 1913 in het leven geroepen ter ondersteuning van de aankomende docenten wiskunde die studeerden voor een akte. De studerenden kregen wiskundige theorie en examenopdrachten ter oefening voorgelegd. Veel van de aktenstudenten bleven lid als ze eenmaal les gaven. Het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* bood echter geen platform voor discussies over het wiskundeonderwijs, en dat was waar begin jaren twintig wel behoefte aan was. In het buitenland ging het wiskundeonderwijs op de schop of was dat zelfs al gebeurd. Verschillende docenten in Nederland wilden hierin het voorbeeld van Duitsland volgen. Daarnaast was er veel discussie over de inrichting van de HBS.

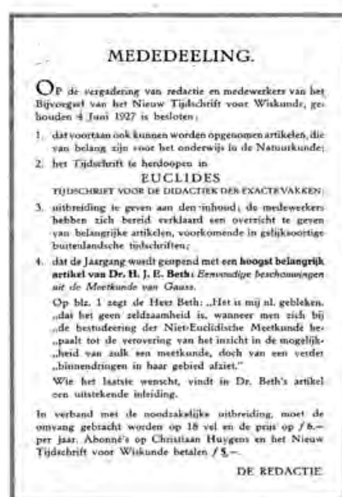
Met de introductie van de A-afdelingen aan de HBS, de zogenaamde literair-economische afdelingen, werd een anti-mathematische sfeer ook in Nederland voelbaar. Wiskundigen en wiskundedocenten maakten zich zorgen over de status van hun vakgebied en voerden discussie over welke wiskunde aan de A-leerlingen moest worden onderwezen, en op welke wijze die wiskunde moest worden onderwezen. Tevens was er discussie over het nut en doel van wiskundeonderwijs meer in het algemeen.

Het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen* bood een platform voor die discussies. Daarnaast wilde het tijdschrift inhaken op de wetgeving omtrent wiskundeonderwijs in binnen- en buitenland en was het de bedoeling geregeld boekbesprekingen te publiceren. Met het eerste nummer, dat ruim werd verspreid door uitgever Noordhoff, werden een pamflet en een bestelkaart meegestuurd. De abonnees van het *Nieuw Tijdschrift* kregen korting op het *Bijvoegsel*.

Eén van de gemakkelijk in het oog springende veranderingen die het tijdschrift in de loop van de jaren heeft ondergaan, is de titel. Die is een aantal malen gewijzigd. In alle gevallen was dat veelzeggend. Met de eerste naamsverandering, van *Bijvoegsel* naar *Euclides* werd het tijdschrift volwassen. Ze maakte zich los van haar moedertijdschrift. Ze koos ook voor een programmatische titel: de *Elementen* van Euclides was het ideaal van de tamelijk ouderwetse wiskundedocenten die tijdens het interbellum exclusief vast wilden blijven houden aan de klassieke meetkunde als manier om het verstand te vormen en te wennen aan exacte redeneringen. Het was een didactisch ideaal, maar tevens bakende het heel duidelijk af wat onder wiskunde verstaan diende te worden: de wiskunde die idealiter onderwezen werd ademde de geest van de negentiende eeuw. De redactie koos zodoende voor een titel waarmee tevens een statement werd afgegeven. Wiskunde was een vak waar iedereen die enige rol van betekenis te vervullen had in onze samenleving kennis van diende te nemen: het leerde degenen die daar geschikt voor waren beter redeneren en het filterde iedereen uit dit niet in staat was om dat te leren. Tevens werd daarmee afkeuring uitgesproken over de vernieuwingsbeweging, die meer inzette op praktisch bruikbare wiskunde.

Met de naamsverandering naar *Euclides* in de vierde jaargang (1927-1928) verscheen ook een ondertitel: 'Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken'. Met die ondertitel werd een claim gelegd op de natuurweten-

schappen in de breedste zin van het woord: natuurkunde, scheikunde en biologie. Die claim in de naam viel vrijwel samen met de oprichting van de verenigingen voor vakdocenten biologie, natuur- en scheikunde: Velines en Velibi. In de katernen van *Euclides* verschenen zodoende lezingen van de congressen die docenten in de exacte vakken vanaf de jaren dertig gezamenlijk hielden. Toch bleef het tijdschrift verder vooral een platform voor wiskundeleraren; er verschenen nauwelijks boekbesprekingen, discussies of artikelen van natuurkundigen of biologen. Wellicht kwam dit omdat de vernieuwingsbewegingen in het onderwijs onder natuurkundigen, chemici en biologen veel meer succes oogstte. Al snel hadden de biologen en de fysici hun eigen didactiektijdschriften, waarin hun vernieuwingsdrift beter tot zijn recht kwam. De wiskundigen daarentegen omarmden het tijdschrift. Vanaf 1940 was het tijdschrift het officiële orgaan van de verenigingen van wiskundeleraren Wimecos en Liwenagel. Beide verenigingen waren rond dezelfde tijd als het tijdschrift opgericht. Wimecos was uitsluitend voor hbs-docenten toegankelijk, terwijl de mathematici aan gymnasia en lycea zich tot Liwenagel moesten wenden. Wiskundedocenten aan de (m)ulo en het ambachtsonderwijs konden bij beide geen lid worden.
De claim op de natuurwetenschappen werd eerst in 1962 losgelaten. Vanaf het vierde nummer in deze achtendertigste jaargang werd zonder verdere toelichting de ondertitel ineens gewijzigd in 'maandblad voor de didactiek van de wiskunde'. Deze stille verandering ging gepaard met de toetreding van de Wiskunde-werkgroep tot de redactie: namens deze groep didactische pioniers nam dr. P.M. van Hiele zitting in de redactie. In 1969 veranderde de naam niet, maar stond deze wel ineens dwars op het titelblad gedrukt en werd het tijdschrift in een gekleurd kaftje gestoken. Dat was meer dan alleen uiterlijk vertoon, zoals de redactie in het eerste nummer van de 45e jaargang duidelijk maakt. Niet alleen waren Wimecos en Liwenagel


MEDEDEELING.

Op de vergadering van redactie en medewerkers van het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gehouden 4 Juni 1927 is besloten:

1. dat voortaan ook kunnen worden opgenomen artikelen, die van belang zijn voor het onderwijs in de Natuurkunde;
2. het Tijdschrift te herdoopen in
EUCLIDES
TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN;
3. uitbreiding te geven aan den inhoud; de medewerkers hebben zich bereid verklaard een overzicht te geven van belangrijke artikelen, voorkomende in gelijksoortige buitenlandsche tijdschriften;
4. dat de Jaargang wordt geopend met een **hoogst belangrijk artikel van Dr. H. J. E. Beth**: *Eenvoudige beschouwingen uit de Meetkunde van Gauss.*

Op blz. 1 zegt de Heer Beth: „Het is mij nl. gebleken, „dat het geen zeldzaamheid is, wanneer men zich bij „de bestudeering der Niet-Euclidische Meetkunde bepaalt tot de verovering van het inzicht in de mogelijk„heid van zulk een meetkunde, doch van een verder „binnendringen in haar gebied afziet."

Wie het laatste wenscht, vindt in Dr. Beth's artikel een uitstekende inleiding.

In verband met de noodzakelijke uitbreiding, moet de omvang gebracht worden op 18 vel en de prijs op ƒ 6.— per jaar. Abonné's op Christiaan Huygens en het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde betalen ƒ 5.—.

DE REDACTIE

figuur 2 Mededeling van de redactie aan het eind van jaargang 3 van het Bijvoegsel (1927)

op dat moment gefuseerd tot de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren – die overigens vanaf dat moment ook leraren van de mavo, voorheen mulo, en ulo-docenten toeliet als leden. Met de Mammoetwet waren zowel vakinhoud als didactiek ook helemaal op drift. De redactie riep docenten op om hun materiaal via het tijdschrift te delen en ervaringen over diverse lesprogramma's uit te wisselen. Dat ging niet vanzelf, maar er verschenen inderdaad af en toe bijdragen van docenten die zich niet beperkten tot wiskunde, maar die ook over concrete lessituaties handelden. Ondertussen nam het belang van de vereniging toe: vanaf jaargang 50 verdween de Wiskunde-werkgroep van het titelblad en was *Euclides* het exclusieve orgaan van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren. De zestigste jaargang (1984-1985) was voor de redactie opnieuw een aanleiding om het tijdschrift drastisch van uiterlijk te veranderen. De dwarse titel werd weer rechtop gezet, maar titel en ondertitel bleven hetzelfde. Het formaat van het tijdschrift veranderde ook: het werd meer vierkant. De redactie sprak expliciet de wens uit om niet alleen een tijdschrift voor,




figuur 3 Nummer 1




figuur 4 Eerste titelblad onder de titel *Euclides* (1927). Met ondertitel die een claim legt op alle exacte vakken




figuur 5 Titelblad van *Euclides* aan het einde van de dwarse jaren (1993). Het volgnummer was herkenbaar gemaakt in de arcering van de cijferreeks




figuur 6 Titelblad van het eerste *Euclides*-nummer met steunkleur (1994)

maar ook en vooral een tijdschrift *door* wiskundeleraren te worden. Tussen de regels door leest men de wens om meer artikelen van docenten te plaatsen, of toch in elk geval artikelen te plaatsen van mensen die begrijpen wat docenten in hun klaslokaal beweegt. Vier jaar later werd de consequentie van deze beleidswijziging ook in de ondertitel tot uitdrukking gebracht: het 'maandblad voor de didactiek van de wiskunde' werd vervangen door 'vakblad voor de wiskundeleraar'. Dat is tot op heden de ondertitel van onze periodiek gebleven. De zeventigste jaargang was opnieuw aanleiding om de vormgeving drastisch om te gooien. Vanaf dat moment kwam *Euclides* uit in het formaat waarin het nu ook verschijnt. De redactie liet het nummer gepaard gaan met de hernieuwde oproep aan eenieder die iets wilde bijdragen om toch vooral de interesses van de docent voor de klas in het oog te houden. Toevoeging van een steunkleur gaf het tijdschrift een beetje meer cachet. Om de vijf jaargangen is het inmiddels gebruik om het uiterlijk iets aan te passen en inmiddels is *full-colour* de standaard. Maar de redactie blijft nadrukkelijk de inhoud boven de vormgeving stellen. Als bron voor het wiskundeonderwijs in Nederland is *Euclides* onmisbaar. Al negentig jaar lang getuigen haar katernen van een actieve en betrokken groep mensen die het wiskundeonderwijs mee helpt vormgeven. Dat de betrokkenen en de motieven voor die betrokkenheid in de loop van die negentig jaar zijn veranderd, spreekt voor zich. De wereld is ondertussen veranderd. De opkomst van een groep professionele wiskundedidactici heeft onder andere bijgedragen aan een blik op het wiskundeonderwijs van buiten het klaslokaal. Zij vertegenwoordigden een geheel ander gedachtengoed dan de ideeën van de academisch wiskundigen, die tot in de jaren zestig, eveneens van buiten het klaslokaal, hun stempel op het wiskundeonderwijs drukten. Vanaf de jaren tachtig kwamen docenten meer en meer aan het woord in de katernen van *Euclides*. Al met al biedt het tijdschrift een fantastisch tijdsbeeld. Wie de oude nummers doorbladert, ziet al snel wat de gemoederen indertijd bezig hield. Dat *Euclides* al die jaren de spreekbuis is geweest van al die verschillende groepen, en er ook vandaag de dag in slaagt om docenten wiskunde – in de brede betekenis van het woord die daar tegenwoordig aan wordt gehecht – van de nodige informatie en inspiratie te voorzien, maakt het tijdschrift er alleen maar interessanter op.

## Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

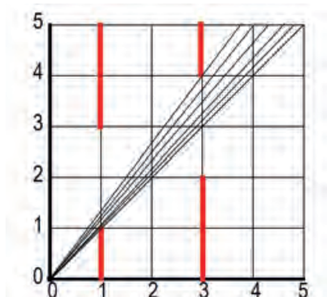
# BREUKEN OP DE HELLING (2)

Martin Kindt

De lijn door de oorsprong die een hoek van 60° met de x-as maakt, treft buiten 0 geen enkel roosterpunt, hoever je het vlak ook uitbreidt! Met de verklaring van dat 'wonder' eindigt dit artikel van Martin Kindt, waarin na het refereren aan de koppeling tussen hellingen en breuken een interessante stamboom van breuken centraal staat.

## Hellingen in de brugklas?

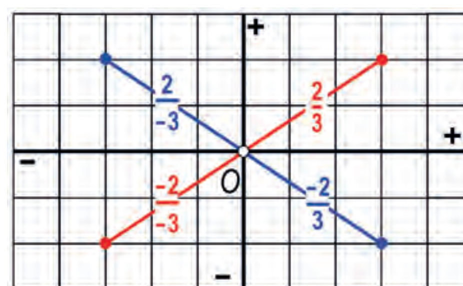
Met de introductie van het begrip 'hellinggetal' hoeft niet gewacht te worden tot de behandeling van lineaire functies. In mijn vorige artikel[1] heb ik een summiere schets gegeven hoe hellingen van schuine lijnen in een vierkantjesrooster kunnen dienen als context om het opereren met breuken wat op te frissen. Om elk misverstand te voorkomen: bij de eerste kennismaking met breuken zijn andere modellen (pizzamodel, breukenstrook, ...) natuurlijker en geschikter. Maar in de aanloop naar een meer formele behandeling van breuken lijkt het me geen slecht idee om het hellinggetal in een vroeg stadium van het voortgezet onderwijs te introduceren. Het mes snijdt hierbij aan twee kanten: het geeft een context om weer wat aan breukrekening te doen, en het anticipeert op de behandeling van functies en grafieken. Het hellingmodel geeft ook een verrassend inzicht in wat het effect is van foute rekenhandelingen op breuken. En er zijn veel mogelijkheden om speels te oefenen, zoals het vragen naar hellingen van lijnen die door een of meer 'poortjes' gaan.




Vanuit het punt (0, 0) gaat een bundel lijnen door het linkerpoortje, de hellingen variëren van 1 tot 3. Een deel van die bundel gaat door beide poortjes, namelijk de lijnen waarvan de helling tussen 1 en $\frac{4}{3}$ ligt. Je kunt dan vragen hoe het zit als je het startpunt omhoog verplaatst naar (0, 1), (0, 2) of (0,3). In het laatste geval komen er *negatieve* hellingen in beeld; daar moet dan wel eerst aandacht voor zijn geweest. Variatie is er te over: combineer bijvoorbeeld verticale met horizontale poortjes. Tip: laat leerlingen ook zelf opgaven in deze geest ontwerpen; van 'eigen producties' steek je veel op!

## Negatieve hellingen

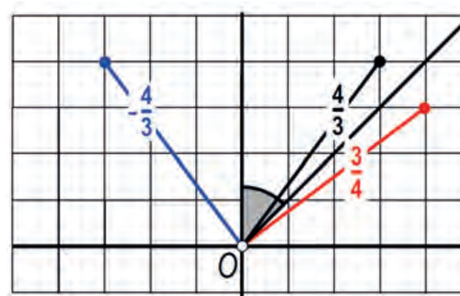
Zodra negatieve getallen hun intrede hebben gedaan, kunnen ook negatieve hellingen ter sprake komen. Die corresponderen met neergaande lijnen in het rooster. Het tegengestelde van een breuk krijg je als je een lijn spiegelt in een verticale of horizontale lijn.




Zo wordt bijvoorbeeld zichtbaar gemaakt dat:

$$\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3} \text{ en } \frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$$

Zowel '*tegengestelde van*' als '*omgekeerde van*' zijn operaties die zichzelf weer opheffen, ofwel die hun eigen inverse zijn. De eerste operatie correspondeert met een spiegeling in de $y$-as (of $x$-as) en de tweede met een spiegeling in de diagonaal $x = y$.
Als we van een hellinggetal het *tegengestelde van het omgekeerde* nemen, komt er een helling van een lijn die loodrecht staat op de oorspronkelijke lijn:

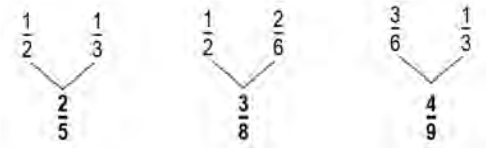



Ook zonder voorkennis van transformatiemeetkunde is dit goed te snappen. Kijk naar het voorbeeld. De lijn met helling $\frac{4}{3}$ maakt hoeken met de diagonaal $x = y$ en de $y$-as die samen gelijk zijn aan 45°. De hoek tussen de rode en blauwe lijn is duidelijk het dubbele hiervan!

## Tussenbreuken

Terug naar breuken met positieve teller en noemer. Het naïef optellen van breuken, door zowel tellers als noemer te sommeren, levert een breuk op die ergens tussen

de twee breuken in ligt. In de getaltheorie wordt zo'n tussenbreuk wel een *mediant* genoemd. Deze operatie is geen eigenlijke bewerking op rationale getallen, want de uitkomst hangt af van de gekozen representant van het getal. Bijvoorbeeld:




Op deze manier kun je bij twee gegeven rationale getallen zoveel tussenbreuken maken, als je maar wilt. Als de representanten gelijke noemers hebben, vind je zo het *rekenkundig gemiddelde*. In het geval van $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ is dit $\frac{3+2}{6+6}=\frac{5}{12}$.

*Rekenkundig gemiddelde:*

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{b} \qquad \frac{a+c}{2b}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)$$

Bij gelijke tellers komt er een ander gemiddelde op de proppen: het zogeheten *harmonisch gemiddelde*. Een verbale definitie hiervan klinkt wat ingewikkeld: *het omgekeerde van het gemiddelde van de omgekeerden.*

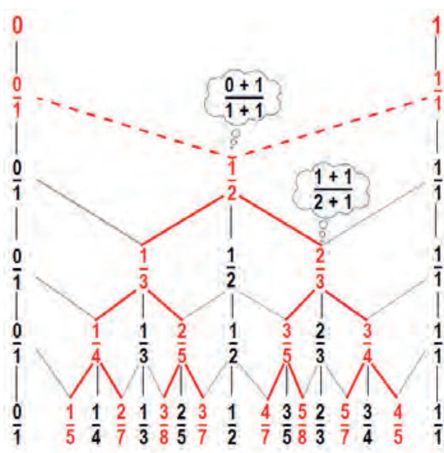
*Harmonisch gemiddelde:*

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a}{d} \qquad \frac{2a}{b+d}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{a}\right)}$$

Denk aan een trainingsritje op de fiets in de bergen. Bergop met een snelheid van 12 km/u en dezelfde weg terug met 60 km/u. De gemiddelde snelheid over heen-en-terug is dan niet 36 km/u maar slechts 20 km/u. Neem de mediant van $\frac{60}{5}$ en $\frac{60}{1}$, *et voilà*.

## Een breukenboom

De figuur toont hoe je stap voor stap via de mediant-operatie een groeiend aantal rationale getallen tussen 0 en 1 kunt genereren.




De 'stamhouders' 0 en 1 brengen de breuk $\frac{1}{2}$ voort. Dan worden $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ gemaakt door $\frac{1}{2}$ te paren aan $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$. En zo verder, en zo voort.

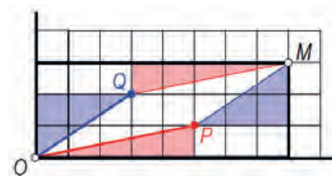
Dat er op elke rij een opklimmende rij van getallen komt te staan, spreekt vanzelf. Minder vanzelfsprekend is het volgende trio eigenschappen:

a. het verschil tussen elk tweetal buren (rood-zwart) op dezelfde regel is een stambreuk (teller = 1);
b. elke breuk in de boom is onvereenvoudigbaar;
c. elk rationaal getal tussen 0 en 1 krijgt een plek in de boom.

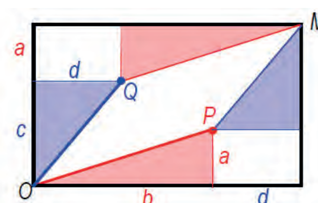
Deze eigenschappen kunnen vanuit het hellingbegrip meetkundig worden verklaard en dat ga ik nu doen.

## Parallellogrammen en breuken

Twee lijnstukken *OP* en *OQ* en in het eerste kwadrant spannen een parallellogram op.

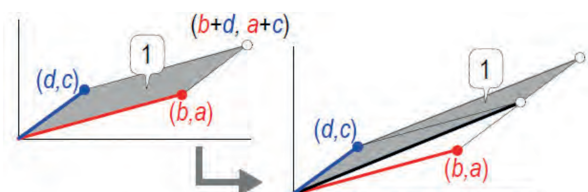



De oppervlakte van het parallellogram *OPMQ* vind je door van de oppervlakte van de rechthoekige omlijsting de rode driehoeken, de blauwe driehoeken en de twee identieke rechthoekjes linksboven en rechtsonder af te trekken. In dit voorbeeld resulteert dat in 7, precies de teller van de breuk die je krijgt door het verschil van de hellingen van *OQ* en *OP* te berekenen. Dat dit niet op toeval berust, volgt na generalisatie:




De oppervlakte van *OPMQ* is gelijk aan:
$(a+c)(b+d)-ab-cd-2ad=bc-ad$ (I)
En ook:
$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$

Bij elk paar breuken past zo'n parallellellogram. Is het verschil van de breuken een breuk met teller 1, dan is de oppervlakte van dit parallellogram ook 1. Bovendien: het verschil van de mediant van twee zulke breuken met elk van die breuken heeft dan weer 1 als teller.



Het plaatje spreekt boekdelen. Een puur algebraïsche verklaring werkt ook, maar die laat ik aan de lezer over. Omdat bij de start van de stamboom de verschillen tussen buren op een rij een breuk met teller 1 is, weet ik dat dit zo blijft bij verdere afdaling in de boom, inductie!

Merk op dat uit de formule (I) volgt dat de oppervlakte van een (niet-ontaard) parallellogram met roosterpunten als hoekpunten een *positief geheel* getal is. Bijgevolg is de kleinst mogelijke oppervlakte van een 'roosterparallellogram' gelijk aan 1! Ik weet dan meteen ook dat de kleinst mogelijke oppervlakte van een roosterdriehoek $\frac{1}{2}$ is. Daaruit volgt dan dat een minimaal parallellogram (oppervlakte 1) geen inwendige roosterpunten heeft. Verbind een eventueel inwendig roosterpunt met de vier hoekpunten van dat parallellogram. De vier roosterdriehoeken die je krijgt, hebben dan samen een oppervlakte $\geq 2$, tegenspraak dus.

De tweede eigenschap (b.) is een direct gevolg van a. Stel bijvoorbeeld dat $y/x$ en $nw/nv$ buren zijn in de boom, waarbij $n$ een natuurlijk getal $\geq 2$ is. Volgens a. is de oppervlakte van het bijpassende parallellogram 1. Het parallellogram opgespannen door de lijnstukken vanuit $O$ naar $(x, y)$ en $(v, w)$ zou nu de oppervlakte $1/n$ hebben, in strijd met het eerder geconstateerde feit dat de oppervlakte van een roosterparallellogram een geheel getal is.

Eigenschap c. is het lastigst te bewijzen. Daarom eerst een voorbeeld: komt de breuk $\frac{17}{30}$ in de boom voor? Om te beginnen is het direct te zien dat deze breuk tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$ ligt, twee buren in de derde rij van de boom. Ik ga nu stap voor stap vergelijken met tussenbreuken uit de boom in lagere rijen, eerst met $\frac{3}{5}$:

$$\frac{17}{30} < \frac{3}{5} = \frac{18}{30} \longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{17}{30} < \frac{3}{5} \quad \to \frac{4}{7}$$

$$\frac{17}{30} = \frac{119}{210} < \frac{4}{7} = \frac{120}{210} \longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \quad \to \frac{5}{9}$$

$$\frac{17}{30} = \frac{51}{90} > \frac{5}{9} = \frac{50}{90} \longrightarrow \frac{5}{9} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \quad \to \frac{9}{16}$$

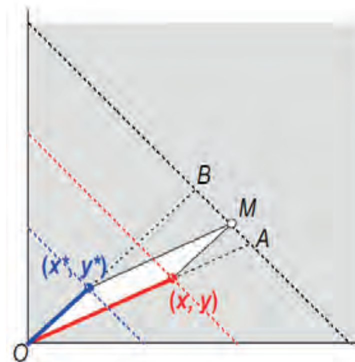
$$\frac{17}{30} = \frac{136}{240} > \frac{9}{16} = \frac{135}{240} \longrightarrow \frac{9}{16} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \quad \to \frac{13}{23}$$

$$\frac{17}{30} = \frac{391}{690} > \frac{13}{23} = \frac{390}{690} \longrightarrow \frac{13}{23} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \quad \to \frac{17}{30}$$

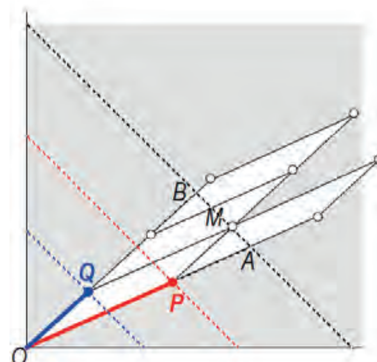
Er moet tot de achtste rij worden afgedaald in de boom, maar dan komen we $\frac{17}{30}$ ook tegen!

Wat ook vooraf al wel duidelijk was, namelijk dat bij voortschrijdende afdaling de tellers en noemers van de nieuwe breuken in de boom almaar groter worden, is de clou van het bewijs van de volledigheid van de boom. Stel ik heb een (onvereenvoudigbare) breuk $\boldsymbol{t/n}$ die tussen de buren $\boldsymbol{y/x}$ en $\boldsymbol{y^*/x^*}$ in ligt, dan geldt: $t + n \geq (y + x) + (y^* + x^*)$ (II)
Als dit waar is, ben ik klaar. Want het is helder dat de som van de vier getallen in het rechterlid stijgt met tenminste 1 bij elke afdaling in de boom en dus na een aantal stappen gelijk zal zijn aan de bovengrens $t + n$.

Het bewijs van (II) kan worden gegeven met behulp van (lineaire) algebra[2], maar ik kies weer voor meetkundig inzicht. Het parallellogram passend bij de breuken $\boldsymbol{y/x}$ en $\boldsymbol{y^*/x^*}$ heeft de oppervlakte 1 en bevat van binnen geen roosterpunt. In de volgende figuur is dit parallellogram getekend en ook drie lijnen met helling –1, die de $x$-as snijden in punten met respectievelijk de coördinaat $y^* + x^*$, $y + x$ en $y + x + y^* + x^*$.




De lijn uit (0,0) naar het punt $(n,t)$ gaat – eventueel na verlenging – door het 'poortje' $AB$. Als ik kan bewijzen dat het punt $(n,t)$, óf samenvalt met $M$ óf boven de lijn $AB$ ligt, dan is (II) bewezen. Het komt er dus op neer dat binnen de driehoek $OAB$ geen roosterpunt mag liggen.




Betegel het vlak met parallellogrammen congruent met $OPMQ$. Omdat de enige roosterpunten binnen of op de rand van $OPMQ$ de vier hoekpunten zijn en omdat de betegeling het gevolg is van een herhaalde translatie over een vector met gehele kentallen, is het zeker dat er geen roosterpunten binnen driehoek $OAB$ liggen en ook dat $M$ het enige roosterpunt is tussen $A$ en $B$. Het punt $(n,t)$

moet dus wel boven de lijn *OA* liggen of samenvallen met *M*. Kortom: $t + n \geq (y + x) + (y^* + x^*)$.

## Tussen alle roosterpunten door

Merk op dat de breuken in onze boom stuk voor stuk kunnen worden omgedraaid om zo alle representanten van rationale getallen > 1 te krijgen. Deze nieuwe boom vormt samen met de boom van breuken tussen 0 en 1 de zogeheten boom van Stern-Brocot.[3] Ik doe of mijn neus bloedt en probeer of ik het getal $\sqrt{3}$ ergens diep in deze Stern-Brocot-boom kan vinden. $\sqrt{3}$ ligt tussen $\frac{3}{2}$ en $\frac{2}{1}$, want $3^2 < 3 \cdot 2^2$ en $2^2 > 3 \cdot 1^2$. Twee stappen omlaag en er komt: $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$

Ik construeer op deze wijze een reeks onderschattingen $y/x$ en bovenschattingen $y^*/x^*$ van $\sqrt{3}$ en gebruik daarbij steeds de 'determinant' (teller$^2$ – 3 · noemer$^2$) om te bepalen of ik met een onder- of bovenschatting van doen heb. In de tabel zijn de breuken als getallenparen genoteerd.

| $(x, y)$ | $(x^*, y^*)$ | $y^2 - 3x^2$ | $y^{*2} - 3x^{*2}$ |
|---|---|---|---|
| (2, 3) | (1, 2) | –3 | +1 |
| (3, 5) | (1, 2) | –2 | +1 |
| (3, 5) | (4, 7) | –2 | +1 |
| (7, 12) | (4, 7) | –3 | +1 |
| (11, 19) | (4, 7) | –2 | +1 |
| (11, 19) | (15, 26) | –2 | +1 |
| (26, 45) | (15, 26) | –3 | +1 |
| (41, 71) | (15, 26) | –2 | +1 |
| (41, 71) | (56, 97) | –2 | +1 |
| (97, 168) | (56, 97) | –3 | +1 |
| (153, 265) | (56, 97) | –2 | +1 |

Opmerkingen:

a. de gevonden getallenparen corresponderen met roosterpunten op drie hyperbolen: $y^2 - 3x^2 = c$ met $c = -3, -2, 1$;

b. een historische onderschatting van $\sqrt{3}$ is de breuk in de laatste regel, namelijk 265/153. Die is door Archimedes gebruikt bij zijn berekening van het getal $\pi$ via in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Als er vier stappen verder wordt afgedaald in de boom van Stern-Brocot komt ook zijn bovenschatting van $\sqrt{3}$ voor de dag: 1351/780.

## Hypothese en bewijs

Hypothese: als in de derde kolom de waarde –3 staat, geldt: $x = y^*$ en $y = 3x^*$ en de rij paren van determinantwaarden is periodiek.

Bewijs: stel $(x, y) = (m, 3n)$ en $(x^*, y^*) = (n, m)$ met $m^2 - 3n^2 = 1$

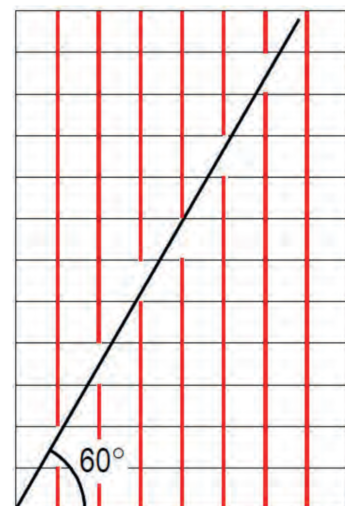
Dan volgt $y^2 - 3x^2 = (3n)^2 - 3m^2 = -3(m^2 - 3n^2) = -3$

De mediant van de breuken $y/x$ en $y^*/x^*$ correspondeert met het getallenpaar $(m + n, m + 3n)$. Hiervan is de determinantwaarde $(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2$ en een beetje algebra leert dat dit gelijk is aan –2. Op deze manier doorgaand komt er:

| $(x, y)$ | $(x^*, y^*)$ | *det* | *det** |
|---|---|---|---|
| $(m, 3n)$ | $(n, m)$ | –3 | +1 |
| $(m+n, m+3n)$ | $(n, m)$ | –2 | +1 |
| $(m+n, m+3n)$ | $(m+2n, 2m+3n)$ | –2 | +1 |
| $(2m+3n, 3m+6n)$<br>$M$ $3N$ | $(m+2n, 2m+3n)$<br>$N$ $M$ | –3 | +1 |

En zie, na drie stappen herhaalt het patroon zich! Omdat bij de start met de paren (2,3) en (1,2) aan de gestelde voorwaarde is voldaan, is nu de periodiciteit bewezen. Dat betekent dat $\sqrt{3}$ niet in de boom van Stern-Brocot voorkomt, en dus geen rationaal getal kan zijn!

In meetkundetaal: de lijn met helling $\sqrt{3}$ en dus met hellingshoek 60°, treft geen enkel roosterpunt. Anders gezegd: de lijn gaat door oneindig veel verticale poortjes met lengte 1 (zie figuur) zonder ooit maar een van de grenspunten te raken!




## Noten

[1] Kindt, M. (2015). Breuken op de helling (1), *Euclides, 90*(5).

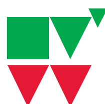
[2] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was*, #18. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[3] Moritz Stern was een Duits wiskundige en Achille Brocot een Franse horlogemaker. Zij hebben onafhankelijk van elkaar de breukenboom ontdekt.

## Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

# EXAMENBESPREKINGEN



## 2015

Er worden geen regionale examenbesprekingen meer gehouden. U kunt de resultaten van de centrale besprekingen lezen op de website *www.nvvw.nl*:

- voor vwo A, vwo B en vwo C op 16 mei;
- voor vmbo TGK op 22 mei;
- voor havo A en B op 23 mei.

# KLEINTJE DIDACTIEK

## VEELGEMAAKTE FOUTEN BIJ STATISTISCH ONDERZOEK

Het komende schooljaar starten we met het nieuwe examenprogramma voor statistiek voor havo en vwo. Het is de bedoeling dat leerlingen onderzoek gaan doen en daarbij statistiek gebruiken. Een veelgebruikte manier om gegevens te verzamelen, is de vragenlijst. Hierbij gaat nogal eens wat mis:

- de vragen zijn dubbelzinnig, te beperkt of juist te ruim geformuleerd waardoor een antwoord als 'ja' of 'nee' eigenlijk nog niets zegt;
- de steekproef is niet aselect gekozen. Leerlingen hebben nogal eens de neiging om met vragenlijsten in de school of in het winkelcentrum in de buurt rond te gaan. Het is zeer de vraag of het leerlingenpubliek op de eigen school representatief is voor de leerling in Nederland. Bij het winkelcentrum komen mogelijk geen mensen die slecht ter been zijn en op schooltijden zal je er maar weinig jongeren vinden;
- de aselecte steekproef is niet representatief omdat uit een selecte groep is gekozen. Of ze sturen juist een (e-mail)bericht via de elektronische leeromgeving (ELO) van school. De steekproef is dan in feite niet aselect, zelfs als de steekproef via de ELO op aselecte wijze wordt gedaan. Dat komt dan bijvoorbeeld omdat niet iedereen op de ELO kijkt, of niet iedereen zijn e-mailadres heeft ingevuld. Ook dichter bij huis is het risico van een niet-representatieve steekproef aanwezig. Wie wil weten wat wiskundedocenten in Nederland vinden van de huidige wiskundemethoden, krijgt geen aselecte steekproef als een (aselecte) peiling onder de leden van de NvVW wordt gehouden. Bepaalde groepen (bijvoorbeeld docenten vmbo, mbo) zijn namelijk ondervertegenwoordigd binnen de vereniging terwijl ze in aantallen vermoedelijk wel de grootste groep vormen. Ook om andere redenen is de groep leden zeer waarschijnlijk niet representatief (wat niets afdoet aan de waardevolle inbreng van leden);
- ook is het belangrijk om leerlingen te leren dat ze rekening moeten houden met de *non-respons*. Als je betrouwbare resultaten wilt krijgen, moet je de *non-respons* zo laag mogelijk zien te krijgen. Wie niet reageert op een e-mailbericht via de ELO, moet dus worden gebeld of zelfs worden bezocht. Wie al eens een enquête van het CBS heeft mogen invullen, weet hoeveel moeite het CBS doet om de *non-respons* laag te houden. Je krijgt een brief thuis met het verzoek om een vragenformulier online in te vullen; wie niet reageert, krijgt nog een brief en wie dan nog niet reageert, krijgt een of meerdere telefoontjes;
- je hebt last van *framing*. Een bekend voorbeeld is om eerst te vragen of het aantal personen in Nederland met borstkanker meer of minder is dan 1 miljoen (en in de andere groep vraag je meer of minder dan 100.000) en vervolgens vraag je hoeveel de leerling denkt dat het er echt zijn. *Framing* gebeurt vaak veel subtieler, bijvoorbeeld omdat in de media eerder negatieve berichten (of tegenstanders) aan het woord worden gelaten dan positieve berichten (of voorstanders). Denk bijvoorbeeld aan schaliegas.

Artikel over lesmateriaal dat specifiek gaat over misleiding:
*www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/243/243maart_kaspers.pdf*
Het lesmateriaal zelf: *www.euronet.nl/~kimk/misleiding/*
Meer lezen over non-respons: *www.hulpbijonderzoek.nl/voorkomen-van-non-respons/_*

**Lonneke Boels**

# TORENS NAAST DE TAFELBERG

Tysger Boelens

## OPGAVE 2 VAN IMO2014

Van 6-13 juli 2014 vond in Kaapstad, Zuid-Afrika de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Het Nederlandse team deed het hier beter dan ooit tevoren. Bronswinnaar Tysger Boelens, inmiddels student wiskunde in Groningen, bespreekt in dit artikel een toegankelijke, maar toch pittige, opgave van deze wedstrijd.




Toen ik in januari 2010 als tweedeklasser in een lokaal ergens in Zuid-Groningen een paar vragen over wiskunde maakte, had ik niet kunnen vermoeden dat dat er toe zou leiden dat ik, viereneenhalf jaar later 10.000 kilometer verderop in een bodywarmer en met twee truien aan, mee zou doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade (die onder de Engelse afkorting IMO bekend staat).

### Meedoen aan de training

Om daar te komen is er een trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, dat ook dient als voorbereiding op de andere internationale wiskundewedstrijden. Tijdens de maandelijkse trainingsweekenden en -dagen doe je tot wel drie trainingssessies van 3,5 uur per dag. Tijdens zo'n sessie ben je, na een kort stukje theorie, voortdurend bezig met opgaven oplossen, slechts onderbroken door een kwartiertje pingpong of volleybal. Als kers op de taart is er elke week huiswerk: vier opgaven die je moet oplossen en uitgewerkt naar een trainer sturen. De training heeft natuurlijk ook een informele kant: je komt een heleboel mensen tegen die een passie voor wiskunde (en een bepaald gevoel voor humor) delen en die het ook gaan studeren, al studeren of gestudeerd hebben.

### Meedoen aan de IMO

Het vierde jaar dat ik in de selectie zat, lukte het: op 7 juni 2014 werd in een zaaltje vol met ouders bekendgemaakt dat ik in het IMO-team voor Zuid-Afrika zat. Nadat ik op de valreep nog de benodigde inentingen had gekregen, was het dan zover: op naar Afrika! In de drie weken tussen de teambekendmaking en het opstijgen van vlucht KL597 naar Kaapstad werd uiteraard gewoon doorgetraind met oefenwedstrijden, maar niet alleen dat: alle olympiadeteams werden ook gehuldigd door staatssecretaris Dekker *himself*.

Nadat we een kwart van de wereld waren overgevlogen (natuurlijk niet zonder in de lucht te trainen) kwamen we aan in Kaapstad. Eerst werden we in een luxehotel een week lang getraind door onze drie begeleiders. Helaas kwam aan het goede leven van driegangendiners snel een eind: de eigenlijke IMO, die een paar kilometer verderop op de campus van de plaatselijke universiteit werd gehouden, was een stuk minder comfortabel: er was bijvoorbeeld geen verwarming, terwijl het 's nachts maar vijf graden was. Maar dat zijn maar details: het mooiste van de IMO is eigenlijk niet de wedstrijd, maar al die andere teams die er zijn. Het is een heel bijzondere ervaring om met leeftijdsgenoten uit de hele wereld te klaverjassen en te weerwolven, terwijl je ook nog eens een heel nieuw werelddeel te zien krijgt.

### De opgave

Opgave 2 van de IMO ging over borden van $n$ bij $n$ vakjes, waarbij op bepaalde vakjes torens staan. De torens staan zo op het bord dat er in elke rij precies één toren staat, en in elke kolom precies één. We definiëren een *vrij vierkant* als een vierkant van vakjes op het bord waarin geen torens staan. We zijn nu op zoek naar de grootste $k(n)$ zodat er op zo'n bord van $n$ bij $n$ met $n$ torens altijd een vrij vierkant van zijde $k(n)$ te vinden is. In de praktijk betekent dit: zoek een formule voor $k(n)$ die afhangt van $n$.

### De weg naar het juiste vermoeden

Dankzij de training is het eerste wat bij je opkomt bij elke opgave: 'kleine gevallen'. Het idee hierachter is dat je meteen gevoel voor de opgave krijgt, en dat als je een patroon in de oplossingen ziet, je meteen kunt proberen of je dit patroon als geheel kan bewijzen. Hier betekent dat dus dat we de gezochte $k(n)$ gaan bepalen voor $n = 2$ en dan voor $n = 3$, enzovoort, net zo lang tot we iets interessants zien.

$n = 2$: Het is duidelijk dat de torens op de diagonaal moeten staan, zoals in figuur 1. Nu is er altijd een leeg vakje en geen leeg 2×2-vierkant. Dus $k(1) = 1$.

$n = 3$: Er zijn hier twee 'echt verschillende' mogelijkheden (je kunt alle mogelijke 3×3-borden door spiegelen en draaien in deze veranderen), namelijk die van figuur 2 en figuur 3. In geen van beiden is ergens een vrij 2×2-vierkant, dus we concluderen $k(2) = 1$.

$n = 4$: Terwijl we wat 4×4-borden bekijken, valt ons op dat op alle borden die we proberen vrije 2×2-vierkanten te vinden zijn. Dit geldt ook voor het bord waarbij de torens op een diagonaal staan (figuur 4). Er bestaan veel combinatoriekproblemen waarbij een minimale of

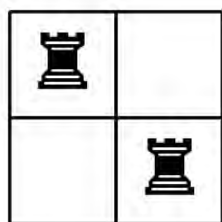
maximale waarde van een heleboel situaties berekend moet worden. Er moet dan ook worden aangetoond dat die waarde daadwerkelijk bereikt wordt. Meestal is dat dan in een 'mooi' geval, dat regelmatig en symmetrisch is. Het zou dus kunnen zijn dat in deze opgave het randgeval het bord is met alle torens op de diagonaal. Als dat zo is, kunnen we $k(n)$ makkelijk berekenen. Het grootste vrije vierkant in deze situatie heeft een zijde van ongeveer $n/2$ (zie figuur 5). Door apart te kijken naar oneven $n$ en even $n$ zien we dat in dit geval zou gelden: $k(n)$ is het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan $n/2$.
Vervolgens proberen we dit te bewijzen, maar helaas gooit de werkelijkheid roet in het eten: zie figuur 6. Daaruit blijkt dat $k(4) = 1$ en geen 2. Dit is natuurlijk vervelend: nu moeten we op zoek naar een nieuw vermoeden. Om het makkelijker te maken patronen te herkennen, zetten we de waarden van $k(n)$ die we hebben gevonden in een tabel:

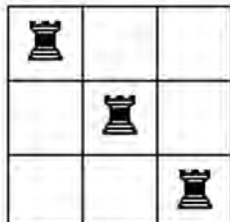
| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(n)$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |

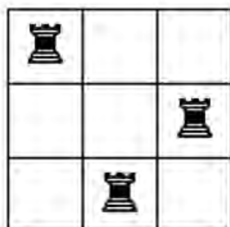
Het wordt duidelijk dat $k(n)$ heel langzaam stijgt. Het is dus niet zo waarschijnlijk dat $k(n)$ op een lineaire manier afhangt van $n$. Op basis van bijvoorbeeld het patroon in figuur 6 zien we dat een soort scheef raster van torens (als in figuur 7) ervoor zorgt dat er geen lege vierkanten met een zijde van ongeveer $\sqrt{n}$ zijn. We formuleren dit nieuwe vermoeden preciezer:
$k(n) = m$ voor $m^2 + 1 \leq n \leq (m + 1)^2$.
Nu zijn er ruwweg twee dingen die we moeten laten zien:

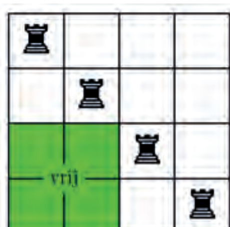
- dat we bij $m^2 \times m^2$-vierkanten daadwerkelijk de torens zo 'vervelend' neer kunnen zetten dat het onmogelijk is om een vrij $m \times m$-vierkant te vinden,
- en dat het bij vierkanten met een zijde groter dan $m^2$ altijd mogelijk is om een vrij $m \times m$-vierkant te vinden.

Het eerste is een constructie, het tweede een bewijs. We zullen de constructie bekijken aan de hand van het concrete geval $m = 3$.

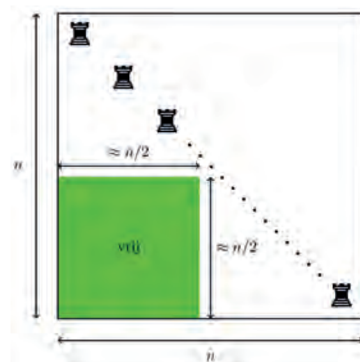

figuur 1


figuur 2


figuur 3



figuur 4



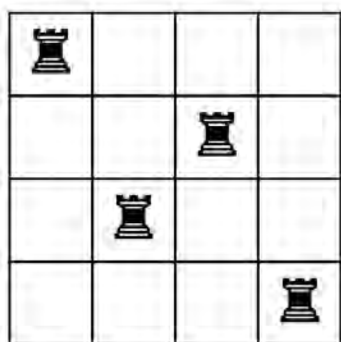
figuur 5

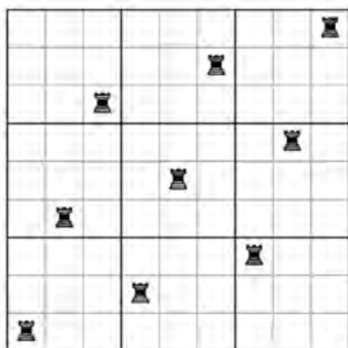
## De constructie

In figuur 7 is de vervelende verdeling voor $m = 3$ te zien. Deze komt als volgt tot stand:
We verdelen het (grote) $m^2 \times m^2$-vierkant in (kleine) $m \times m$-vierkanten (aangeven door zwarte lijnen). In elk kleiner vierkant plaatsen we precies één toren. De plek van de toren in het kleine vierkant correspondeert met de plek van het kleine vierkant in het grote vierkant: als we een klein vierkantje naar rechts gaan, gaat de toren een vakje omhoog, en als we een klein vierkantje omhoog gaan, gaat de toren een vakje naar rechts. Zo ontstaat het scheve raster, en het is intuïtief duidelijk dat er in elke rij en elke kolom maar één toren staat. Iets minder duidelijk is het dat er nu geen vrij $m \times m$-vierkant meer is. Aantonen dat deze constructie inderdaad aan alle gestelde eisen voldoet, is een tamelijk technische aangelegenheid, dus dat werken we hier niet uit.

## Het bewijs

We willen bewijzen dat er altijd een vrij vierkant is van zijde $m$ als de zijden van het schaakbord minstens $m^2 + 1$ lang zijn. Dit doen we met een bewijs uit het ongerijmde: we nemen aan dat het niet waar is, om hier vervolgens een tegenspraak uit af te leiden. Omdat onze aanname leidt tot onzin, moet het tegendeel wel waar zijn. In dit geval nemen we aan dat er geen vrije vierkanten van zijde $m$ zijn in zo'n schaakbord met zijde van minstens $m^2 + 1$. (En we bekijken weer het geval $m = 3$.) We hebben dus een schaakbord met een zijde van 10 of groter. We weten dat op elke rij een toren staat, dus ook op de onderste rij. Recht boven die toren op de onderste rij passen minstens drie 3×3-vierkanten door onze aanname over het formaat van het schaakbord. Omdat deze drie vierkanten niet vrij zijn, staat in elk daarvan minstens een toren.
In de drie kolommen die deze torens delen, staan dus minstens drie torens. Maar we weten dat in elke kolom precies een toren staat. Dus in de drie 3×3-vierkanten alleen staan al alle torens die in totaal in de 3 kolommen staan. Maar ondertussen hadden we aangenomen dat in deze kolommen in de onderste rij (dus onder deze drie vierkanten) ook nog een toren stond. Dit is een tegenspraak, dus onze aanname is onwaar: er moet ergens een vrij vierkant van zijde 3 zijn. Het bewijs voor algemene $m$ gaat precies hetzelfde.


figuur 6


figuur 7

## Afsluiting

Tijdens de IMO had ik zelf een iets ingewikkelder bewijs voor het tweede deel gevonden, en heb ik alleen een schets gemaakt van de constructie van een 'vervelende' verdeling. Ik heb uiteindelijk vijf van de zeven punten voor de opgave gekregen (dit betekent: opgelost, maar met grote gaten in het bewijs). Uiteindelijk heb ik nog dertien punten gescoord op de overige vijf opgaven, en hiermee een bronzen medaille verdiend. Al met al kan ik met mooie herinneringen en veel tevredenheid terugkijken op de IMO.

## Over de auteur

Tysger Boelens nam als vwo-scholier van RSG Ter Apel vier jaar lang deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. In 2014 maakte hij deel uit van het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Nu studeert hij wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *t.y.m.boelens@rug.nl*

# HET FIZIER GERICHT OP...

## DE WISKUNDE B-DAG

Susanne Tak



In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering biedt Susanne Tak een overzicht van de Wiskunde B-dag.

De Wiskunde B-dag is een praktische opdracht in wedstrijdvorm voor teams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel. Tijdens de Wiskunde B-dag werken leerlingen in teams van drie of vier aan een open wiskundig probleem. Aan het eind van de dag presenteert elk team zijn oplossing in de vorm van een werkstuk. Scholen kunnen de opdracht gebruiken als praktische opdracht. Daarnaast kunnen de werkstukken ingezonden worden voor de landelijke wedstrijd. Een Wiskunde B-dag-opdracht heeft vaak een technische of wetenschappelijke context, zoals bijvoorbeeld de wiskunde achter spiegelingen, het berekenen van heel hoge machten of combinatorische speltheorie. De opdracht daagt leerlingen uit patronen te vinden, kritisch te kijken naar modellen, logisch te redeneren en te argumenteren. De opgaven worden ontwikkeld door een ontwerpteam bestaande uit docenten en medewerkers van verschillende universiteiten en scholen. De opdrachten zijn na de prijsuitreiking van de landelijke wedstrijd gratis te downloaden en worden ook in het Engels gepubliceerd. In 2014 deden naast 111 Nederlandse scholen ook scholen uit België, Duitsland en Slowakije mee.



Leerling aan het werk op de Wiskunde B-dag 2014

De opdracht van 2014 ging over het spel *Lights Out*. Het originele spel heeft een bord met in totaal 25 lampjes in een rooster van 5 rijen bij 5 kolommen. In de startsituatie zijn sommige lampjes aan. Het doel van *Lights Out* is, zoals de naam al zegt, om alle lampjes uit te krijgen. Je kunt lampjes aanklikken (het zijn eigenlijk knopjes met een lampje erin). Als je een lampje aanklikt, schakel je het lampje om; dus als het lampje aan was, gaat het uit, en als het lampje uit was, gaat het aan. Bovendien: als je een lampje omschakelt door het aan te klikken, schakel je ook de directe buren (links, rechts, boven en onder) van dat lampje om. Dit roept natuurlijk meteen vragen op, zoals hoe je in een gegeven startsituatie te werk gaat om alle lampjes uit te krijgen en of alle startsituaties wel oplosbaar zijn. Om het antwoord op de laatste vraag meteen maar weg te geven: nee, niet altijd, maar het hangt ook af van de dimensies van het bord. Over de wiskunde achter *Lights Out* is online een hoop uitleg te vinden, maar deze uitleg maakt veelal gebruik van lineaire algebra. Enerzijds was dit een voordeel voor het ontwerp van de Wiskunde B-dag-opdracht: wat er online al over gepubliceerd is, is te moeilijk voor een vwo-leerling. Anderzijds was het ook een pittige klus voor het ontwerpteam: hoe kunnen leerlingen zonder kennis van lineaire algebra toch meer ontdekken over de wiskunde achter *Lights Out*? Gelukkig valt er ook op andere manieren te rekenen en redeneren over *Lights Out*, bijvoorbeeld als een eenvoudigere variant wordt beschouwd van 1 bij $n$ lampjes.
Ga bijvoorbeeld uit van een bord met 1 rij en 5 kolommen. We bekijken de situatie 10010, waarbij een 1 staat voor een lampje dat aanstaat, en een 0 voor een lampje dat uitstaat. Een klik op het $n$-de lampje geven we weer als $K_n$. De puzzel 10010 kan opgelost worden door $K_2K_3$. In het algemeen kun je twee lampjes die onderling op afstand 3 liggen, allebei omschakelen zonder dat de rest van de lampjes wijzigt. Lampjes 1 en 4 zijn zo'n duo, maar lampjes 2 en 5 natuurlijk ook. Lampjes 1 en 2 kun je ook allebei omschakelen zonder dat de rest van de lampjes wijzigt, en lampjes 4 en 5 ook. Immers, puzzel 11000 kan opgelost worden door $K_1$. We kunnen een lampje ook 'verplaatsen' tussen deze groepen. Neem bijvoorbeeld de startsituatie 10001. Het lampje op plaats 5 kan door $K_5$ verplaatst worden naar plaats 4, en zo zijn we weer terug bij de situatie 10010. Maar wat als we de startsituatie 10000 hebben? We kunnen het brandende lampje eindeloos 'rondsturen' over plekken 1, 2, 4, en 5, maar oplossen gaan we dit niet. Gaat er bij u al een lampje branden over hoe u in één oogopslag kunt zien of een 1 bij 5 *Lights Out*-puzzel wel of niet oplosbaar is? En hoe het dan zit bij 1 bij 6, of 1 bij $n$? De volgende Wiskunde B-dag is op vrijdag 13 november 2015. Doet uw school dan ook (weer) mee? Vanaf begin september kunt u zich inschrijven. Voor meer informatie over de Wiskunde B-dag, inclusief de *Lights Out*-opgave en alle opgaven uit voorgaande jaren, zie *www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag.*

### Over de auteur

Susanne Tak werkt bij het Freudenthal Instituut onder meer aan de Wiskunde B-dag, het DWO-project en de U-Talent Academie. E-mailadres: *S.W.Tak@uu.nl*.

# 'WIJ ZIJN VERSLAAFD!'

Martijn van Iwaarden

## DE METHODE MOET ONS HELPEN, NIET DWINGEN

Martijn van Iwaarden, docent wiskunde, maakt zich zorgen over de invloed van de wiskundemethode die we gebruiken op onze vakdidactiek. In dit betoog roept hij op tot het opnieuw nadenken over didactiek, onafhankelijk van de methode.

Op onze school, het Ichthus College te Veenendaal, maken we sinds jaar en dag gebruik van de grootste wiskundemethode in Nederland, met een marktaandeel van 60% tot 70%. Al jaren behalen we prima resultaten; dat moet ook gezegd worden. Toch maak ik me zorgen. Ik maak me zorgen over het gemak waarmee onze methode ons denken over didactiek lijkt weg te nemen en het wiskundig denken van onze leerlingen beperkt. In dit betoog vindt u mijn mening op basis van mijn ervaring. Ik hoop dat het u aanzet om opnieuw uw didactiek te doordenken. De boodschap die ik wil meegeven, is deze: *Neem zelf verantwoordelijkheid voor uw wiskundedidactiek en laat dat niet over aan welke methode dan ook!*

### Waarom wiskunde?

Een van de doelen die met het wiskundeonderwijs worden nagestreefd, is het bevorderen van het denken. Bij het oplossen van vraagstukken worden leerlingen meestal zodanig gestuurd met behulp van deelvragen dat van zelf denken weinig sprake meer is. Wie niet meer doet dan gewillig een methode volgen, kan naar mijn mening niet zeker zijn of dit doel wel behaald wordt.
Een ander doel is zorgvuldig formuleren. Maar als we tijdens de komende examens wiskunde A/C ook 'breien' en notatiefouten niet meer fout mogen rekenen, wordt ook dit doel niet gehaald. De aangepaste correctievoorschriften zullen langzaam maar zeker doorsijpelen naar de lagere leerjaren. Bedenk dat onze leerlingen met wiskunde A ook vervolgopleidingen gaan volgen met grote kwantitatieve en wiskundige onderdelen.

### De methode getoetst

In 2012 verscheen het *Handboek wiskundedidactiek*.[1] Verschillende hoofdstukken uit dit handboek heb ik inmiddels samen met een aantal collega's bestudeerd. Al lezend en denkend kan ik niet anders concluderen dan dat onze methode op veel punten in gebreke blijft als we het *Handboek* als uitgangspunt nemen. Laat ik een aantal voorbeelden noemen.

**Voorbeeld 1: oefenen van vaardigheden**

In het *Handboek wiskundedidactiek* wordt Van Dormolen met instemming aangehaald over het oefenen van vaardigheden. Leerlingen zouden pas moeten beginnen met het oefenen van vaardigheden als ze aan die handelingen betekenis kunnen geven. Toetsen we bijvoorbeeld de lesstof over rekenen met letters aan dit criterium, dan constateer ik dat onze leerlingen door onze methode geconfronteerd worden met woorden als 'gelijksoortige termen'. Ze zijn van dezelfde soort en daarom mag je ze optellen. Wat nu eigenlijk bedoeld wordt met 'gelijksoortig' blijft vaag. Van dezelfde orde is het herleiden van breukvormen. Delen van breukvormen worden 'weggestreept' zonder echt duidelijk te maken waarom in de ene situatie wel iets weggestreept mag worden en in de andere situatie niet. Een laatste voorbeeld uit deze categorie is het werken met haakjes. Als een uitdrukking met haakjes, zoals $2(4x - 3)$, vermenigvuldigd moet worden met een getal, zijn er veel leerlingen die niet begrijpen wat ze doen.
De herleiding van $4\cdot(2(4x - 3))$ is regelmatig: $8\cdot(4\cdot 4x - 4\cdot 3)$. Een goed begrip van het rekenen met letters zou dit moeten voorkomen. Door voortdurend trainen worden de fouten eruit getraind, maar is er ook begrip? Als je leerlingen maar lang genoeg sommetjes laat oefenen, dan doen ze het trucje wel goed, maar kunnen ze ook uitleggen wat ze doen en waarom ze het doen? En te vaak moeten we helaas constateren dat een paar weken na de toets de vaardigheid als sneeuw voor de zon verdwenen is. Wiskunde doen gaat dan niet meer eerst om begrijpen wat ik doe, maar verwordt tot 'sommetjes maken'. In de boeken staan veel goed uitgewerkte voorbeelden. En sommetjes maken is voor veel leerlingen niet veel meer dan 'het voorbeeld nadoen'. Als docent moet je intussen maar hopen dat de leerlingen ook de verbanden tussen de onderdelen gaan zien en al doende leren waarom ze doen wat ze doen. Maar misschien hopen we wel vooral op goede resultaten bij de toets of het examen.

**Voorbeeld 2: modelleren en algebraïseren**

Een ander voorbeeld betreft het modelleren en algebraiseren. Deze bij uitstek wiskundige activiteiten worden door onze methode vaak voorgekauwd voor de leerlingen. In contexten wordt meestal al aangegeven met welke vergelijking of formule gewerkt moet worden, terwijl met een andere keuze van variabele of assenstelsel er andere mogelijkheden zijn, maar deze worden genegeerd. Op deze manier wordt het creatief denken en openstaan voor andere oplossingsstrategieën onvoldoende gestimuleerd in de gewone lesstof. Met het oog op de introductie van wiskundige denkactiviteiten is er nu een aantal opgaven gelabeld als denkactiviteit. Dit is echt onnodig als de andere opgaven wat vaker ontdaan zouden worden van sturende deelvragen.

Er zijn verschillende manieren het opnieuw doordenken van uw wiskundedidactiek vorm te geven. Een aantal wil ik ter aanmoediging noemen:

- bereid eens een aantal lessen voor met een collega die in een parallelklas lesgeeft en licht uw didactische keuzes toe;
- bestudeer met uw collega's een boek naar keuze over wiskundedidactiek. Bijvoorbeeld het *Handboek wiskundedidactiek*;
- doe een hoofdstuk lang het boek dicht en ontwerp helemaal zelf uw lessen en oefenmateriaal. Voor oefenopdrachten kunt u inspiratie opdoen in uw methode, maar neem ze niet klakkeloos over;
- gebruik (voor een tijdje) een methode die weinig zelf uitlegt, zodat u zelf aan de slag moet om te bedenken hoe u gaat uitleggen;
- verwijder onnodig sturende deelvragen uit contextopgaven en presenteer die als een som die niet in het boek staat;
- neem deel aan een docentontwikkelteam (DOT) in uw regio.

## Onze methodeverslaving

In het cursusjaar 2014-2015 zijn we met een aantal collega's begonnen aan een pilot. Ons voornemen is om het hele jaar in 2 havo les te geven met een compleet andere methode. Deze methode bevat weinig uitleg en dwingt leerlingen zich voortdurend af te vragen: wat ben ik aan het doen? Al vrijwel direct ontdekten we hoezeer we verslaafd waren aan onze methode en hoezeer we ons ook in de didactiek door de methode lieten leiden. Het artikel van Frans Ballering in een recente uitgave van *Euclides*[2] geeft daarover ook een goede anekdote. Een andere, echt verschillende, methode uitproberen dwingt je om je wiskundedidactiek opnieuw te doordenken.

## Onze beroepseer

Ik wil met dit artikel niet bereiken dat we als collega's massaal de grote methoden aan de kant leggen. Wel wil ik oproepen om aandacht te schenken aan onze didactiek. Wij, als docenten wiskunde, zijn de professionals op het gebied van wiskundedidactiek. Het moet ons een beroepseer zijn om de wiskundedidactiek niet over te laten aan de auteurs van welke methode dan ook.

## Noten


[1] Drijvers, P., Van Streun, A., & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven

[2] Ballering, Frans (2015). Het boek weet alles. *Euclides, 90*(4), 4-5.


## Over de auteur


Martijn van Iwaarden is wiskundedocent aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *iwd@ichthuscollege.nl*

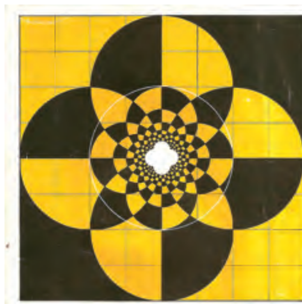

# UITDAGENDE PROBLEMEN

## EEN SCHAAKBORD BINNENSTEBUITEN KEREN

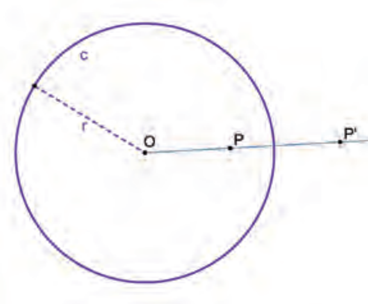
Jacques Jansen

Wat is er met het schaakbord gebeurd? Met deze vraag werden leerlingen uit 4/5 vwo met wiskunde D van het Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven uitgedaagd. In dit artikel onthult Jacques Jansen het geheim: een cirkelspiegeling.

De afbeelding in figuur 1 staat op de omslag van *Pythagoras* nummer 1 uit 1974.[1] Het plaatje trok toen onmiddellijk mijn aandacht. Misschien kwam dat door de *pop-art* (u weet wel, een kunststroming uit de jaren zestig) die toen erg in zwang was. De afbeelding in figuur 1 is ontstaan met behulp van de transformatie *inversie.* Inversie kent u misschien van de prenten van graficus Maurits Escher, bijvoorbeeld zijn cirkellimieten.



figuur 1




figuur 2

## Inversie

Een ander woord voor inversie is cirkelspiegeling. De leerlingen van het Lorentz Casimir Lyceum gingen een middag op ontdekkingstocht over dit onderwerp in het kader van Brainsport.[2] Na een introductie met een PowerPointpresentatie gingen ze zelf aan de slag. Ze maakten hierbij gebruik van het meetkundeprogramma *Geogebra*.[3] Het leerlingmateriaal is terug te vinden op *vakbladeuclides.nl/906jansen*. Centraal stonden deze middag de volgende twee onderzoeksvragen:

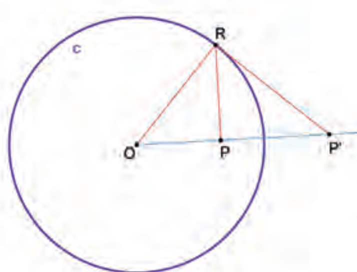
- is er een verband tussen spiegelen in een lijn en spiegelen in een cirkel?
- en hoe zit dat met dat schaakbord? Wat is er gebeurd?

## Definitie van inversie

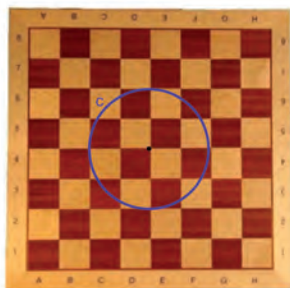
In figuur 2 is een cirkel $c$ getekend met middelpunt $O$ en straal $r$. Het punt $P$ is een willekeurig punt in het vlak

dat niet met punt $O$ samenvalt. Vanuit punt $O$ is halflijn $OP$ getekend. Het punt $P'$ ligt op halflijn $OP$ zodat geldt: $OP \cdot OP' = r^2$. De punten $P$ en $P'$ noemen we elkaars inversiebeeld (spiegelbeeld) ten opzichte van de cirkel. Het vinden van inversiebeeld $P'$ noemen we ook wel *inverteren*. Op deze manier kunnen we dus spiegelen in cirkel $c$.

Hoe construeer je inversiebeelden? Eerst beginnen we met een punt $P$ binnen de inversiecirkel en construeren het inversiebeeld $P'$. Zie figuur 3. Richt een loodlijn in $P$ op lijn $OP$. Noem snijpunt met cirkel $R$. Trek door $R$ de loodlijn op $OR$ en snijd deze lijn met halflijn $OP$; dat geeft $P'$. Voor een punt $P$ buiten de inversiecirkel kunt u de constructie van figuur 3 in omgekeerde richting doen.




figuur 3




figuur 4

## Inversiebeeld van een schaakbord bepalen

Nu willen we het inversiebeeld van een schaakbord (figuur 4) bepalen. De hokjes van een schaakbord worden begrensd door rechte lijnen, dus we kunnen deze vraag terugbrengen tot: ‘Wat is het inversiebeeld van een rechte lijn?’ Leerlingen ontdekten al snel dat lijnen door het inversiecentrum (middelpunt van de cirkel) invariant zijn. En vervolgens vonden ze dat als de lijnen niet door het centrum gaan, ze worden afgebeeld op cirkels die wel door het centrum gaan. De randen van het schaakbord worden daarom afgebeeld op vier cirkels die allemaal door het centrum gaan. Samen vormen deze een klavertjevier binnen de cirkel. Hierbinnen bevindt zich het witte buitengebied van het schaakbord, want alles buiten de cirkel wordt afgebeeld in het binnengebied van de cirkel. Alles binnen de inversiecirkel wordt juist afgebeeld op het buitengebied van de cirkel. De inversie keert het schaakbord dus eigenlijk binnenstebuiten. De inversiecirkel zelf is invariant: elk punt op de cirkel wordt op zichzelf afgebeeld.

Toch is er nog iets aan de hand met het geïnverteerde plaatje van het schaakbord op de omslag van *Pythagoras*. In het Pythagorasartikel zelf worden de volgende twee vragen gesteld:

- is het hele schaakbord op de omslag afgebeeld?
- is ook de hele inversiefiguur van het schaakbord op de omslag weergegeven?

In nummer 2 van dezelfde jaargang vinden we als antwoord:

- het hele schaakbord staat erop (64 velden!);
- de hele inversiefiguur is niet afgebeeld, want de vier velden die het midden van een schaakbord vormen, zijn slechts weergegeven in de vier hoekpunten van de afbeelding. De rest strekt zich uit tot in het oneindige.

Maar let u eens op een halve diagonaal van het schaakbord. Bijvoorbeeld vanuit het midden naar rechtsboven. Binnen de cirkel zien we toch wel heel veel vervormde vierhoekjes rondom die halve diagonaal. Een tweetal leerlingen kwam op het eind van de studiemiddag naar mij toe en vertelde mij: ‘Er is inderdaad nog iets bijzonders. Binnen de cirkel zien we het inversiebeeld van een bord van 16 bij 16.’ Had de auteur van dit Pythagorasartikel dit ook zo bedoeld? Wie zal het zeggen?

## Verdere bespiegelingen

Ook in het dagelijks leven spelen spiegelingen een belangrijke rol. We spiegelen ons al heel lang. In de Nederlandse taal hebben we verschillende uitdrukkingen zoals ‘de ogen zijn de spiegels der ziel’ of ‘wie zich aan een ander spiegelt, spiegelt zich zacht.’ Prachtig vind ik de zin van romanschrijver Tommy Wieringa in zijn boek *Dit zijn de namen*: ‘Hij liep naar het raam en sloot zijn spiegelbeeld buiten door de gordijnen dicht te doen.’ Maar ook in de schilderkunst komen we spiegeling tegen. Er zijn diverse voorbeelden. De Spaanse schilder Diego Velázques (1599-1660) werd door spiegeling geïnspireerd. In figuur 5 zien we zijn schilderij *Venus voor de spiegel*.



figuur 5

Een schilderij dat ook interessant is voor wiskunde C op het vwo vanwege de optica. Een cupido houdt een spiegel vast. Maar kijkend naar de stand van de spiegel, is het dan wel juist dat het gezicht van Venus daar op afgebeeld wordt? Of had het toch haar romp moeten zijn? Dit schilderij, in het bijzonder de afbeelding in de spiegel, krijgt een belangrijke betekenis in het boek *Oorlog en Terpentijn* van de Vlaamse auteur Stefan Hertmans.[4]

Spiegelen in een vlak is een activiteit in de ruimte, maar we kunnen het terugbrengen tot een transformatie in het

platte vlak. Kijkt u maar naar de halve stoel (figuur 6) van ontwerpster Miriam van der Lubbe, die zij ooit presenteerde in de Dutch Designweek in Eindhoven. De rode lijn en blauwe lijnstukjes heb ik zelf aangebracht.
Kunnen we ook zoiets doen bij spiegelen in een cirkel? Komt dat ergens van een spiegelobject in de ruimte en welke vorm heeft het dan? Natuurlijk is het geen vlakke spiegel. Nee, we kunnen denken aan een cilindrische of conische spiegel. Of misschien wel een bol of een ander rond spiegelobject. U denkt waarschijnlijk aan lachspiegels. De auteur van het Pythagorasartikel dacht aan *Anamorfosen*; dat zijn hele bijzondere schilderijen. Er zijn twee soorten. Bij de soort waar het ons om gaat, heb je een hulpmiddel nodig en wel een spiegel. Met behulp van een cilindrische spiegel kun je het vervormde beeld op het doek in de cilinder in de oorspronkelijke toestand terug zien. Zie de foto's in figuur 7. In de spiegelende cilinder zien we de heilige Hiëronymus (kardinaal) die aan het mediteren is. Het schilderij wordt toegeschreven aan de Nederlander Matthias Stom en dateert uit 1630.[5]
Op het schaakbord zien we binnen de cirkel ook veel vervormd. Ik citeer uit het Pythagorasartikel: Deze spiegeling in een cilindermantel heeft veel weg van de inversie die we hierboven bespraken. Als je zo'n cirkel op een schaakbord zet, zie je in de cilinder iets dat veel lijkt op de figuur op de omslag. Zie figuur 8. Helemaal hetzelfde als een cirkelspiegeling is deze cilinderspiegeling echter niet.



figuur 6


figuur 8


figuur 7a


figuur 7b

## Noten en referenties

[1] *Pythagoras, 14*, 1 en 2, 1974.
[2] Brainsport, een alternatief van het project Brainport, is een initiatief van het Lorentz Casimir Lyceum. Zie *Euclides, 90*(5). Voor dit project worden gastsprekers uitgenodigd voor vier verschillende domeinen: medische wereld, theoretische wetenschap, hightech & innovatie en capita selecta. Het *schaakbordonderzoek* viel onder theoretische wetenschap.
[3] Het programma *Geogebra* is gratis te downloaden van *www.geogebra.org*.
[4] Hertmans, S. (2014). *Oorlog en Terpentijn.* Amsterdam: De Bezige Bij.
[5] De drie foto's zijn gemaakt in het depot van het Centraal Museum in Utrecht, zie *http://centraalmuseum.nl/*

## Meer lezen?

– de Meyere, J. & Weijma, H. (1989). *Anamorfosen, kunst met een omweg*. Haarlem: Aramith Uitgevers.
– Leeman, F. (1975). *Anamorfosen.* Amsterdam: Landshof.


*vakbladeuclides.nl/906jansen*

## Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

# VANUIT DE OUDE DOOS

## OPGAVE VAN DE JAARVERGADERING

Ton Lecluse

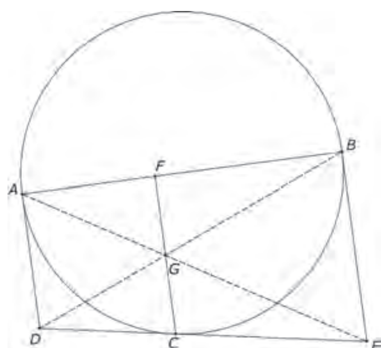


Jaarlijks deelt Ton Lecluse op de jaarvergadering een opgave uit. Van de ingezonden uitwerkingen maakt hij een mooi artikel voor de Oude Doos-serie.

Dit jaar was de opgave (deels) afkomstig uit het *Leerboek der Vlakke Meetkunde IV* van H.A. Derksen en G.L.N.H. de Laive (leraren van de HBS Nijmegen) uit 1913:

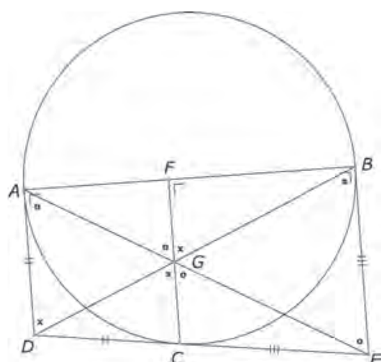
In de uiteinden van de middellijn $AB$ aan een gegeven cirkel worden raaklijnen getrokken aan deze cirkel. De raaklijn in een derde punt $C$ op de cirkel snijdt de andere twee raaklijnen in $D$ en $E$. $F$ is de loodrechte projectie van $C$ op $AB$, zie figuur 1.

a. Bewijs dat de lijnen $CF$, $AE$ en $BD$ door één punt $G$ gaan.
b. Bewijs dat $G$ het midden is van $CF$.



figuur 1

De gegeven figuur bevat natuurlijk al enkele voor de hand liggende eigenschappen. $AB$ is middellijn, dus $AD$ en $BE$ staan loodrecht op $AD$, dus $AD$, $CF$ en $BE$ zijn evenwijdig. De rechte hoeken en gelijke hoeken die uit deze evenwijdigheid volgen, zijn in figuur 2 alvast aangegeven. In het vervolg gebruiken we deze gelijke hoeken, evenwijdigheden en gelijke raaklijnstukken zonder deze steeds opnieuw te moeten bewijzen. Er kwamen diverse oplossingen binnen. De oplossers geven niet alleen een fraai bewijs, maar verwoorden ook hun gedachtengang, en deze is bijzonder leerzaam. Natuurlijk zien we dezelfde

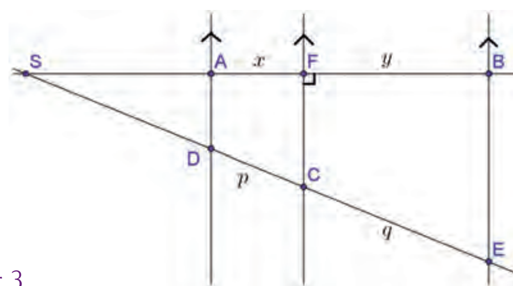


figuur 2

ingrediënten (gelijke raaklijnstukken aan cirkels, gelijkvormigheid) bij meerdere oplossers terugkomen, maar de beschrijving van hun beleving is toch grappig verschillend. Het zou de oplossers tekort doen om (een deel van) hun bewijs niet in dit artikel op te nemen, maar dan wordt het wel een lang verhaal. Vandaar dat hier een paar inzendingen worden beschreven, en het complete artikel te vinden is op *vakbladeuclides.nl/906jaaropgave*.

Laten we beginnen met de bespreking van vraag b. Deze komt bij alle inzenders neer op hetzelfde principe, maar er zijn toch kleine verschillen in hoe men het gebruikte gereedschap inzet. Je kunt bijvoorbeeld de volgende stelling inzetten. Ik citeer Jan Otto Kranenborg:

Als twee snijdende lijnen (loodrecht) gesneden worden door drie evenwijdige lijnen, dan zijn de verhoudingen van de afgesneden lijnstukken gelijk, zie figuur 3. Deze stelling zegt dus $x : y = p : q$.



figuur 3

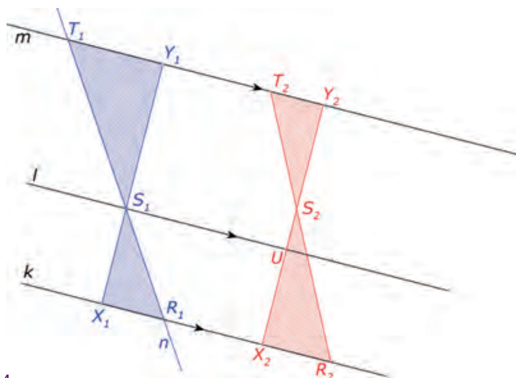
Grappig is dat inzenders hierbij verschillende formuleringen gebruiken. Zo spreekt die van André van den Berg me aan: De lijnen $k$, $l$ en $m$ zijn evenwijdig, $l$ ligt tussen $k$ en $m$. De afstand van $k$ tot $l$ noemen we $p$, de afstand van $l$ tot $m$ noemen we $q$. Nu nemen we een lijn $n$ die $k$ in $R$ en $m$ in $T$ snijdt. Laat $S$ een punt op $n$ zijn dat ligt tussen $R$ en $T$. Dan geldt:

**Lemma A** Als $S$ op $l$ ligt, dan $RS : ST = p : q$
**Lemma B** Als $RS : ST = p : q$ dan ligt $S$ op $l$

Een bewijs: teken een lijn door $S$ loodrecht op de drie evenwijdige lijnen en maak gebruik van de gelijkvormigheid van de twee ontstane rechthoekige driehoeken.

Ik heb het bewijs namens André even uitgeschreven, en er een tekening bij gemaakt, zie figuur 4.

**Bewijs Lemma A** – Gebruik het blauwe deel in figuur 4. Omdat $X_1S_1 : S_1Y_1 = p : q$ is gegeven én de blauwe driehoeken gelijkvormig zijn, geldt ook
$X_1S_1 : S_1Y_1 = p : q = R_1S_1 : S_1T_1$



figuur 4

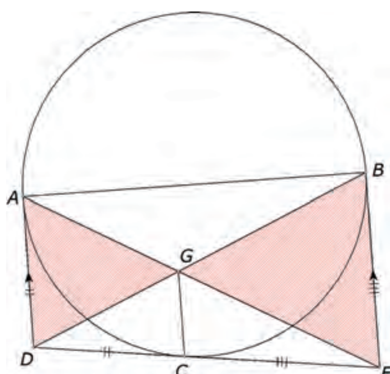
**Bewijs Lemma B** – Gebruik het rode deel in figuur 4: Uit lemma A volgt: $X_2U : UY_2 = p : q$, maar ook is gegeven: $R_2S_2 : S_2T_2 = p : q$, en uit de rood gearceerde gelijkvormigheid volgt: $R_2S_2 : S_2T_2 = X_2S_2 : S_2Y_2$. Dus $X_2U : UY_2 = X_2S_2 : S_2Y_2 = p : q$, dus $S = U$.
Hiermee is André snel klaar.

**De oplossing van André**
*DA, CF* en *EB* staan alledrie loodrecht op middellijn *AB*, stel $AF = p$ en $FB = q$, dan hebben we, volgens bovenstaand lemma A, $DC : CE = p : q$, zeg $DC = \lambda p$ en $CE = \lambda q$. Maar dan geldt ook $AD = \lambda p$ en $BE = \lambda q$ (raaklijnstukken). We merken op dat driehoek *ADG* gelijkvormig is met driehoek *EBG* (*hh, Z-hoeken*), zodat $AG : EG = AD : EB = p : q$, waaruit met behulp van lemma B volgt dat punt *G* op *CF* moet liggen. De andere oplossers geven bij vraag b min of meer hetzelfde bewijs.

**De bewijzen van vraag a**

## Aad Goddijn

Aad heeft natuurlijk veel ervaring met een beetje verdraaien van de vraag, omdat hij wel weet dat je de bijzondere relaties in de figuur moet vinden en je niet alleen moet richten op de bewering van het eindresultaat. Voor de lezer formuleert Aad het dan wat bruut: vergeet *F*, zie figuur 5. Je weet nu dus nog niet dat *CG* loodrecht staat op *AB*. In dit geval is (in Aads oplossing) de feitelijke sleutel het feit dat raaklijnstukken vanuit een punt aan een cirkel gelijk zijn. Ook dat is natuurlijk ervaring; in een van je opgaven in je wiskundig leven moet je gezien hebben dat dat werkt. Als je dat dan ergens anders herkent, heb je een kern gevonden. Daarna komen de standaarddingen, verhoudingen en zo.



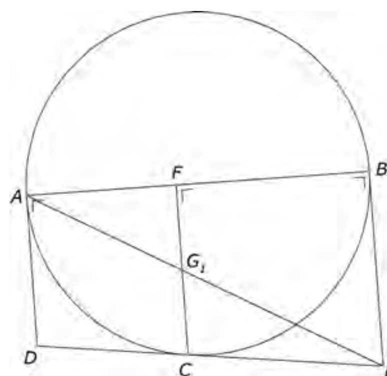
figuur 5

- *AD* = *DC* en *CE* = *EB*;
- vanwege *AD* evenwijdig aan *BE* zijn de driehoeken *ADG* en *EBG* gelijkvormig;
- dus $DG : GB = AD : BE = DC : CE$;
- dus zijn de driehoeken *DCG* en *DEB* gelijkvormig (*zhz*);
- dus *GC* evenwijdig aan *BE*;
- trek *GC* door, die snijdt *AB* loodrecht. En, dat is, ja, *F*.

Sjoerd Zondervan geeft in principe (zonder *F* weg te laten) hetzelfde bewijs als Aad. Ook geeft Sjoerd een formulering van de opgave die hapklaar is voor klasgebruik.

## Quintijn Puite

Citaat:
Ik heb even wat heftigere stellingen als Desargues, Pappos, Ceva en Meneloas door m'n hoofd laten gaan, maar heb het probleem vervolgens erg elementair bewezen. Een van de strategieën die we onze olympiadeleerlingen leren om te bewijzen dat drie lijnen $l_1$, $l_2$ en $l_3$ concurrent zijn, is te bewijzen dat lijn $l_2$ lijn $l_1$ in hetzelfde punt snijdt als waar lijn $l_3$ lijn $l_1$ snijdt. (Het klinkt triviaal, maar het bepaalt toch je aanpak. Een voorbeeld: waarom snijden voor een driehoek *ABC* de bissectrice van hoek *A* en de middelloodlijn van zijde *BC* elkaar op de omcirkel



figuur 6

van de driehoek? Omdat elk van beide door het midden van boog *BC* gaat). Nu spelen *AE* en *BD* in dit probleem een symmetrische rol, dus ik neem deze als $l_2$ en $l_3$, en voor $l_1$ neem ik juist *FC*, zie figuur 6.
Merk op dat *BE, FC* en *AD* evenwijdig zijn als loodlijnen op de middellijn *AB*. Bekijk eerst het snijpunt van *AE* en *FC*; dat noem ik $G_1$. Er geldt $FG_1/BE = AG_1/AE = DC/DE = DA/DE$, dus $FG_1 = BE \times DA/DE$.
**Uitleg:**
1e =-teken: gelijkvormigheid driehoeken $AFG_1$ en *ABE*;
2e =-teken: gelijkvormigheid driehoeken $EG_1C$ en *EAD*;
3e =-teken: gelijke raaklijnstukjes *DC*=*DA* en *EC*=*EB*.
Zo vinden we ook $CG_1/DA = CE/DE = BE/DE$, dus $CG_1 = DA \times BE/DE$. We zien dat $CG_1$ en $FG_1$ even lang zijn, dus $G_1$ is het midden van *FC*! Geheel analoog zien we dat $G_2$, het snijpunt van *BD* en *FC*, ook het midden is

van $FC$. Dus de drie lijnen zijn concurrent. En onderdeel b hebben we en passant ook gedaan; in zekere zin werkte dit onderdeel zelfs als een hint voor mij bij mijn aanpak voor onderdeel a. Ik kwam hierop doordat ik op twee manieren op lijnstuk $FC$ terugzak: als $FG_1$ (puntvermenigvuldiging vanuit $A$) en als $G_2C$ (puntvermenigvuldiging vanuit $D$ met dezelfde factor). Uitschrijven van deze observaties en bedenken dat je net zo goed $AD$ op twee manieren terugziet (puntvermenigvuldiging vanuit $B$ respectievelijk vanuit $E$ met weer een zelfde factor), leidde tot bovenstaande.

## Kees Rijke

Vul driehoek $ABD$ aan tot een rechthoek met het vierde hoekpunt $H$ op lijnstuk $BE$, zie figuur 7. Met behulp van driehoek $EHD$ zie je dat: $FC = AD + \frac{DC}{DE}(BE - AD)$.

Verder geldt in driehoek $ABE$: $FG = \frac{AF}{AB} \cdot BE$ en dus geldt ook: $FG = \frac{DC}{DE} \cdot BE$

Bewezen moet worden: $FC = 2 \cdot FG$ ofwel

$AD + \frac{DC}{DE}(BE - AD) = 2 \cdot \frac{DC}{DE} \cdot BE$. Omdat

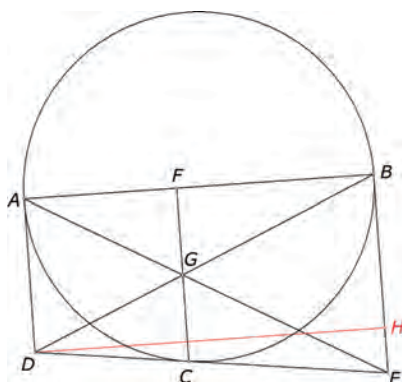
$DC = AD$ en $DE = AD + BE$ (raaklijnstukken vanuit $D$ en $E$), moet aangetoond worden dat

$AD + AD \cdot \frac{BE-AD}{BE+AD} = 2 \cdot AD \cdot \frac{BE}{BE+AD}$. Weglaten

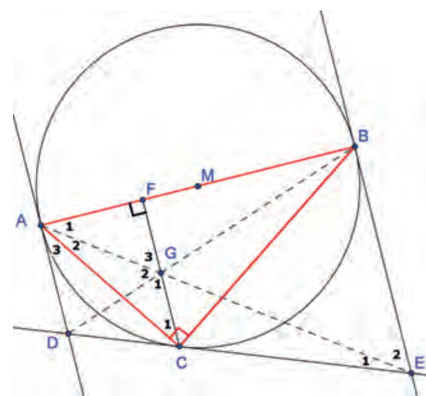
van de factor $AD$ en vermenigvuldigen met $AD + BE$ geeft: $BE + AD + BE - AD = 2 \cdot BE$ en dat klopt natuurlijk!

## Jan Otto Kranenborg

In de uiteinden van de middellijn $AB$ van een gegeven cirkel worden raaklijnen getrokken. De raaklijn in een derde punt $C$ op de cirkel snijdt de andere twee raaklijnen in $D$ en $E$. $F$ is de loodrechte projectie van $C$ op $AB$. Te bewijzen: $CF$, $AE$ en $BD$ gaan door één punt $G$.
Bewijs: Voor het gemak nummer ik enkele hoeken, zie figuur 8. $G$ is het snijpunt van $AE$ en $BD$; als $CF$ door $G$ moet gaan, moet $\angle CGF$ gestrekt zijn.
Ik bewijs dat $\angle CGA + \angle FGA = 180°$
Ofwel: $\angle G_{12} + \angle G_3 = 180°$.



figuur 7



figuur 8

$\angle G_{12} = 180° - \angle A_2 - \angle C_1$ (hoekensom driehoek);
$\angle G_3 = (\angle E_2 =)\ \angle A_{23}$ (*F-hoeken*; *Z-hoeken*, omdat $BE$ evenwijdig aan $FC$ en $AD$);
Dan is $\angle G_{12} + \angle G_3 = 180° - \angle A_2 - \angle C_1 + \angle A_{23} = 180° - \angle C_1 + \angle A_3 = 180°$, omdat $CF$ evenwijdig is aan $AD$ geldt dat $\angle C_1 = \angle A_3$ (*Z-hoeken*).

**En nog meer**

Cor Oosterom zond een analytisch bewijs in. Hij kiest $AB$ als horizontale en $AD$ als verticale as.

**Onderdeel a** – Het ingevoerde assenstelsel is als volgt : $A(0,0)$, $B(2,0)$, $D(0,d)$, $C(e,f)$, $E(2,g)$.
Cirkelvergelijking: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
$AD = DC$ geeft: $d^2 = e^2 + (f - d)^2$
$C$ op de cirkel: $(e - 1)^2 + f^2 = 1$
Combinatie levert op: $d = \frac{e}{f}$

Vergelijking $AE$: $y = \frac{g}{2} \cdot x$ en vergelijking $BD$:

$y = -\frac{d}{2} \cdot x + d$

$CE = EB$ geeft (na enige herleiding, gebruikmakend dat $C$ op de cirkel ligt): $g = \frac{2-e}{f}$

$x = e$ voldoet inderdaad aan beide lijnvergelijkingen.

Onderdeel b – Te bewijzen $\frac{g}{2} \cdot e = \frac{1}{2} f$ met $g = \frac{2-e}{f}$.

Analoog leidt dit tot de identiteit: $e(2 - e) = f^2 = 2e - e^2$.

Wouter van Orsouw heeft een synthetisch bewijs waarin hij er uiteindelijk in slaagt een driehoek te maken waarin $AE$, $BE$ en $FC$ hoogtelijnen zijn, dus door één punt gaan. Ikzelf (Ton) heb twee analytische bewijzen gevonden. Naast de bewijzen zelf hebben oplossers nog een aantal aardige extra eigenschappen van de figuur benoemd, of de opgave aangepast voor gebruik in de klas. Dit staat allemaal op *vakbladeuclides.nl/906jaaropgave*

 *vakbladeuclides.nl/906jaaropgave*

## Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Hooghelandt College te Amersfoort. E-mailadres: *a.lecluse@casema.nl*

# TEGENVOETER

Roland Meijerink

*Kia ora*! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld. Deze keer eerst maar eens antwoord op de voor de hand liggende vragen: wie, waarom en hoe?







Bijna zes jaar geleden ben ik gestart als docent. Na een studie Elektrotechniek en de eerstegraads lerarenopleiding natuurkunde in Enschede vond ik een baan op het Herbert Vissers College in Nieuw-Vennep. Daar ging ik na enkele maanden behalve natuurkunde ook wiskunde geven. Dankzij een lerarenbeurs kon ik de eerstegraads lerarenopleiding wiskunde in Leiden voltooien. In de loop der jaren leerde ik ontzettend veel als docent, maar ook als mentor, projectlid of coördinator van het een en ander, examensecretaris – u weet wel hoe het gaat. En de eerlijkheid gebiedt te zeggen: ik was nog lang niet uitgeleerd.

'DE ERVARINGEN ZIJN POSITIEF, MAAR DE LEERCURVE STEIL.'

Toch leek het mij leuk om weer eens een nieuwe uitdaging aan te gaan in een andere omgeving. Mijn partner stond op het punt haar opleiding als spoedeisendehulparts af te ronden. Eerder had ze al twee jaar in Zuid-Afrika gewerkt, dus een stap naar het buitenland lag voor de hand. Een Engelstalig land met een aangenaam klimaat, waar voor ons allebei voldoende te leren viel. We waren beiden al een keer in Nieuw-Zeeland geweest en al snel waren we het eens dat daar onze nabije toekomst lag.

Hoe vind je daar vervolgens een baan? Eigenlijk heel simpel. Je zoekt in een landelijke database (*Education Gazette*) naar vacatures en stuurt een email met brief plus CV. Daar doe je een filmpje bij, waarin je wat vertelt over jezelf en je stijl van lesgeven. Vervolgens heb je via *Skype* sollicitatiegesprekken met de rector en de sectievoorzitter en biedt de school je een baan aan. Ten slotte regel je een visum en pak je het vliegtuig.
Natuurlijk is dat sneller gezegd dan gedaan. In totaal ben ik ruim een half jaar bezig geweest. Het begint met het bemachtigen van officiële vertalingen van al je diploma's. De originelen en vertalingen stuur je naar een overheidsinstantie (NZQA), die tegen betaling alles controleert en in een rapport zet. Met dat rapport, een bewijs van taalvaardigheid (in mijn geval een IELTS examen) en Verklaring Omtrent Gedrag in de hand benader je de *Teachers Council*, die je een voorlopige registratie geeft. Daarmee kun je officieel pas solliciteren. Ik had een handvol scholen tevergeefs benaderd, toen ik van een ervaringsdeskundige het advies kreeg een filmpje toe te voegen. Vervolgens was de eerste sollicitatie meteen raak! Het kan natuurlijk toeval zijn, maar ik begrijp van mijn huidige baas dat het mijn sollicitatie deed opvallen en een aantal potentiële beren op de weg voor hem werd weggenomen. Visa zijn er in veel soorten en maten. Omdat ik een baanaanbod had, was in mijn geval het *Essential Skills* visum voor twee jaar relatief snel en eenvoudig te krijgen.

Op het moment dat ik dit schrijf is het schooljaar een paar weken onderweg. Veel is nieuw, veel gelukkig ook bekend. De ervaringen zijn positief, maar de leercurve steil. Daarover de volgende keer meer! Mocht u niet zo lang willen wachten: we houden een blog bij op *www.tegenvoeters.nl*. Daar besteed ik behalve aan ons persoonlijke reilen en zeilen ook regelmatig aandacht aan de gang van zaken op school. Wilt u liever een berichtje sturen? Dat kan op *rmeijerink@karamu.school.nz*.

# EEN π-SHIRT, BETER LAAT DAN NOOIT!

Rob van Oord

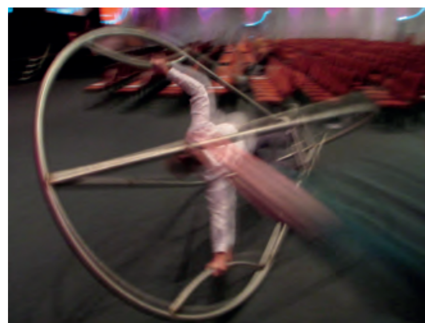
## VERSLAG VAN DE NWD 2015

Wat te doen als je met pensioen bent? Gewoon weer naar de Nationale Wiskundedagen! Rob van Oord is niet te stoppen, niet alleen bezocht hij de NWD, maar hij gaf er en passant ook een workshop en schreef wederom voor u een verslag van zijn ervaringen.

Natuurlijk ga ik weer naar de NWD, want zo veel vrienden wil je niet missen op de jaarlijkse 'reünie' van wiskundecollega's. Inspiratie opdoen voor je lessen die je gewoon nog geeft, of als invaller. Verdieping van je wiskundekennis, je laten verrassen door bijzondere aspecten van je favoriete vak, op de hoogte blijven van de rol van wiskundigen in de nieuwste ontwikkelingen in de maatschappij. Dat zijn de ingrediënten van de NWD en die maken een tweedaags bezoek meer dan waard. Ook moeder de vrouw is blij dat je effe een paar dagen de hort op bent, en neemt een nachtje alleen tussen de koude lakens graag voor lief. Want koud was het.

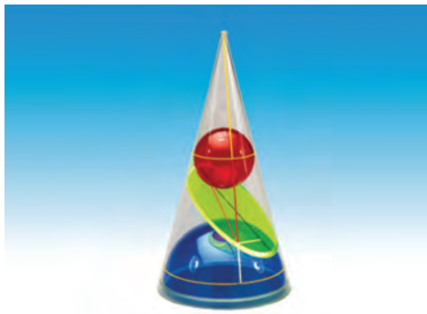
Vier plenaire lezingen en 40 workshops geven voldoende stof om gelukkig van te worden. In dit verslag komen slechts enkele workshops voor. Als deelnemer kun je er zelf maar vier bijwonen. Op de site van de NWD zijn de hand-outs en presentaties van vrijwel alle lezingen en workshops te vinden.[1] Maar nu maar eens iets over wat ik zelf heb gezien en beleefd.

Hoe bijzonder een cycloïde is, werd door Michiel Doorman mooi uit de doeken gedaan. Aan de hand van deze ventielkromme, zijn muze, liet hij 20 jaar NWD de revue passeren. Om de kromme zichtbaar te maken, bevestigde hij een lampje op het ventiel van de voorband van zijn fiets en nam in het schemerdonker een foto met een lange sluitertijd van de baan ervan. Mijn gedachten gingen uit naar twee jaar geleden toen ik met mijn examenklas naar Nijmegen ging voor de masterclass *Waltzing Wheels* van Stephan Berendonk en Leon van den Broek. Daar moesten de leerlingen met een spirograaf de ventielkromme tekenen. Je zou nu ook met speels gemak leerlingen met hun smartphone een foto of een filmpje ervan kunnen laten maken. Daarna beginnen de Wiskundige Denkactiviteiten. Is er een formule van de baan? Hoe lang is de baan bij een omwenteling van het wiel? Iets verder gezocht: hoe groot is de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen de grond en een omwenteling wordt ingesloten? Wie een grafische rekenmachine heeft, kan – uitgaande van een straal van 1 van het wiel – met de parametervoorstelling $x = t - \sin t$ en $y = 1 - \cos t$ de cycloïde plotten. Met wat integraalrekening kun je dan voor de lengte van 1 periode van de cycloïde op 8 komen en voor de oppervlakte onder 1 periode tot $3\pi$.[2] Michiel liet met filmpjes zien dat de (halve, omgekeerde) cycloïde de brachistochroon is, de snelste glijbaan van een punt *A* boven de grond naar een punt *B* op de grond. Daarbij maakt het niet uit welk deel van de (halve) cycloïde je neemt. Vanaf elk willekeurig punt op de baan ben je even snel in het eindpunt. Een andere wereldvondst was die van Huygens bij een slingeruurwerk. Als je een massa aan het eind van een draadje een uitwijking geeft en loslaat zodat hij gaat slingeren, dan is de slingertijd bij grotere uitwijkingen niet gelijk aan die bij kleinere uitwijkingen. Maar als je er voor kunt zorgen dat de baan van de massa tijdens het slingeren precies op een cycloïde ligt, dan is de slingertijd van die massa onafhankelijk van de uitwijking. Huygens verzon zogenaamde wangen waartegen het draadje waaraan de massa zit tijdens het slingeren wordt omgebogen zodat het uiteinde met de massa precies op een cycloïde beweegt. In een artikel van K.P. Hart staat dat de wangen ook elk de vorm van een (halve) cycloïde hebben.[3] Zie ook het artikel van Jan Aarts en Henk Broer.[4]



figuur 1 Swier Garst in zijn oloïde

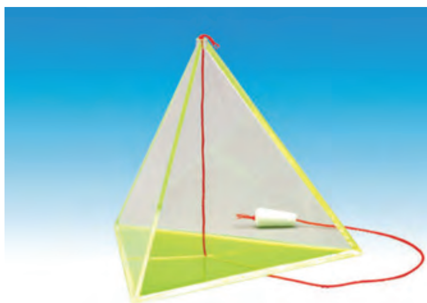
Na deze terugblik op mooie wiskunde in de afgelopen NWD's en de conclusie dat wij zelf de muzen van de wiskunde zijn, kwam Fieke Dekkers. Zij is als wiskundige verbonden aan het RIVM en doet onderzoek naar de invloed van alledaagse straling op de gezondheid, op het risico om kanker te krijgen. De modellen die voor grote hoeveelheden straling zijn opgesteld voor het risico op kanker berusten op tellingen van kankergevallen bij kernrampen. De vraag is of deze lineaire modellen een op een kunnen worden voortgezet naar risico's op kanker bij zeer kleine hoeveelheden straling zoals bij het personeel in ziekenhuizen bij Röntgenlabs. Ze maakte met



figuur 2 Ellips tussen bollen

een alcoholverstuiver de straling zichtbaar die in de zaal ook aanwezig is. Lopen we daarmee een hoger risico? Fieke liet in een duidelijk verhaal doorschemeren dat er eigenlijk nog geen zinnig woord gezegd kan worden over de risico's op kanker bij het blootstaan aan zeer kleine straling. Na de lezing zag ik Swier in zijn oloïde ronddraaien over de vloer van het Atrium, zie figuur 1. Een oloïde bestaat uit aaneengelaste stalen buizen die de contouren van twee dwars in elkaar geschoven bierviltjes vormen. Middenin zitten een paar buizen waartegen je de voeten schrap kunt zetten. Dan erin hangen en na een zetje rollend over de vloer bewegen.

Tijd voor een rondgang langs de stands. Ik ben weer verleid tot het kopen van materiaal over optische fenomenen en Escher in de stand van Jan Broeders. Wel de aanbiedingen gekocht, want ik had een beperkt budget op zak. Bij de stand van Eurofysica met de modellen zag ik enkele nieuwe, maar met een niet erg hoog Doutzen Kroes-gehalte. Alleen de kegel met daarin twee bollen en een ellips benadert dat een beetje, zie figuur 2. De nieuwe had binnenin een beweegbare draad. Hiermee kun je laten zien waar het zwaartepunt van zo'n lichaam zit,



figuur 3 Draadmodel

zie figuur 3. Dat ophangen van wiskundige vormen kwam op de NWD nog vaker aan de orde.

Zo ook in de lezing van Martin Kindt over methoden die Archimedes al gebruikte om een formule voor de inhoud van een bol te bepalen door een bol (met straal $r$) en een kegel (met straal bodem van $2r$ en hoogte $2r$) aan de ene kant van een balans te hangen en te snappen hoe die samen in evenwicht hangen met een cilinder (met straal bodem $2r$ en hoogte $2r$), zie kader.

## Kader

Het principe dat Archimedes al gebruikte, stoelt op oppervlaktes van doorsneden van een cilinder, (halve) bol en kegel. Als je ervan uitgaat dat de inhoud van een kegel $^1/_3$ keer de inhoud is van de cilinder waarin hij precies past, dan kun je aan twee kanten van een balans schijfje voor schijfje de inhoud van de cilinder uithangen tegen een schijfje van een kegel en een schijfje van een bol bij elkaar.

Rechts hangt de cilinder met zwaartepunt op afstand $r$ van het ophangpunt. Het moment van de hele cilinder is dan $r \cdot Inhoud_{cilinder} = r \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2r = \pi \cdot 8r^3$. Hieronder zie je een dwarsdoorsnede, met rechts in de cilinder ook nog doorsneden van de bol en de kegel getekend.

De diameter van de bol is $2r$. Dan is $y$ de middelevenredige van $x$ en $(2r - x)$, dus $y^2 = x(2r - x) = 2r \cdot x - x^2$. Hieruit volgt dat $y^2 + x^2 = 2rx$.

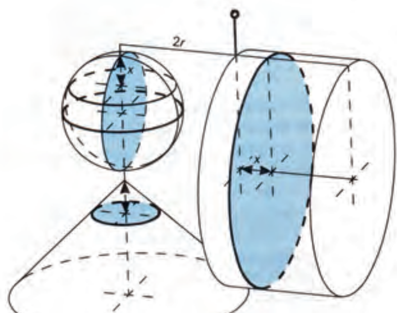
Vermenigvuldig alles met $\pi$, dan geldt:

**(1)**... $\pi y^2 + \pi x^2 = 2\pi rx$

Links in de figuur is te zien dat de horizontale doorsnede van de bol op afstand $x$ van boven gelijk is aan $\pi y^2$ en dat tegelijkertijd de doorsnede van de kegel op afstand $x$ onder de top gelijk is aan $\pi x^2$. Het moment van deze twee cirkels is dan $2r \cdot (\pi y^2 + \pi x^2)$, omdat de cirkels als het ware in hun zwaartepunt (middelpunt) zijn opgehangen op afstand $2r$ van het ophangpunt. Als je nu in (1) alles met $2r$ vermenigvuldigt, dan krijg je links $2r \cdot (\pi y^2 + \pi x^2)$ en rechts $2\pi rx \cdot 2r = \pi x\,(2r)^2$. Dit laatste is precies het moment van een cirkel met straal $2r$ op afstand $x$ van het ophangpunt. Als je nu $x$ van 0 tot $2r$ laat lopen, dan hangt steeds een grote cirkel met straal $2r$ op afstand $x$ (rechts) in evenwicht met een cirkel van de bol en eentje van de kegel op afstand $2r$ (links) beide op afstand $x$ van boven. Bovendien heb je dan alle cirkels die de cilinder opvullen (rechts) en alle cirkeltjes die precies de bol en de kegel opvullen (links).

Dus $2r \cdot (Inhoud_{bol} + Inhoud_{kegel}) = r \cdot Inhoud_{cilinder}$. Er van uitgaand dat $Inhoud_{kegel} = {}^1/_3 \cdot Inhoud_{cilinder}$ komt tot $2 \cdot I_{bol} = {}^1/_3 \cdot I_{cilinder} = {}^1/_3\pi \cdot 8r^3$, dus $I_{bol} = {}^4/_3\pi r^3$. Q.E.D.

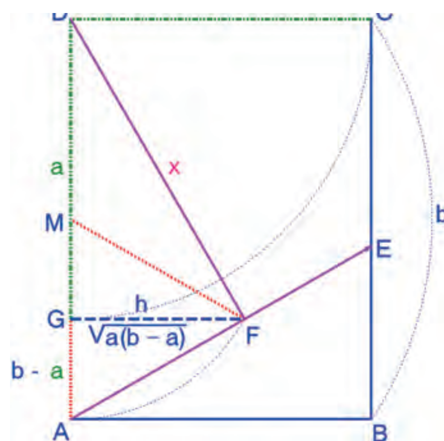
Ik zag een dergelijke balansafbeelding ook in de hand-out van Anne van Streun, zie figuur 4. Kennelijk komen er flink wat wiskundige denkactiviteiten (WDA) bij kijken om het bewijs met de balans te snappen. Ik daag de lezer uit om te snappen hoe die figuur gebruikt kan worden om de formule van de inhoud van een bol te verklaren. Net als Anne vind ik dat in elke wiskundeles WDA moeten plaatsvinden. Het voordoen-nadoenconcept levert geen kritische leerlingen op. Misschien wat hogere cijfers bij de ploeteraars, maar die kennis is dan snel verdwenen. Op dit moment waart het WDA-spook door Nederland alsof het iets nieuws is. Ik vind dat je altijd moet zoeken naar WDA. Waarom zou je het getal -2 benoemen? Waarom werkt een balansmethode bij het oplossen van




figuur 4 Bol, kegel, cilinder

een (lineaire) vergelijking? Is kwadraat afsplitsen echt uit de tijd? Martin Kindt zegt dat hij de *abc*-formule niet uit zijn hoofd kent. Hij splitst altijd kwadraat af. Verder was Martin zeer verguld met de stelling van Ceva. Daarmee kun je in een klap bewijzen dat zowel zwaartelijnen als bissectrices en hoogtelijnen in een driehoek door 1 punt gaan. Van Martin was een boekje te koop met een verzameling van al zijn 'Wat te bewijzen is...' uit de jaargangen van de *Nieuwe Wiskrant*. Wie wilde, kon een gesigneerd exemplaar bemachtigen.

In de pauze na de eerste lezing snel naar B15 om alles in gereedheid te brengen voor mijn eigen workshop. Samen met Marjan Botke moesten gekleurde papieren, kartonnen neusisstroken, geodriehoeken, linialen, markeerstiften, schaartjes en werkbladen en een blad met benodigde voorkennis op de tafels worden gelegd. Na een korte introductie waarbij iedereen op een of andere manier een hoek in drie gelijke hoeken moest delen, werd vervolgens met behulp van 'klassikaal' vouwen (een geodriehoek en een passer heeft een leerling doorgaans ook niet bij zich) stap voor stap naar twee lijnen in een rechthoek toegewerkt. De langs die lijnen geknipte delen zouden na wat schuiven tot een vierkant gelegd kunnen worden. In een PowerPoint werden de mogelijke keuzes voor de deelnemers voorbereid. Daarna ging ieder in groepjes aan de slag met de trisectie van een hoek of verdelen van een rechthoek naar een vierkant of een vierkant naar een gelijkzijdige driehoek. Er werd eerst een instructie gegeven die tot een bepaald resultaat leidde. Daarna moest er gezocht worden naar een bewijs. Om een vierkant te vinden met oppervlakte $ab$ (van een rechthoek met zijden $a$ en $b$) moet zijde $\sqrt{(ab)}$ gevonden worden. Dit is de middelevenredige van $a$ en $b$. Die vind je in een halve cirkel met middellijn $a + b$, als loodlijn op het punt waar $a$ en $b$ tegen elkaar liggen. Maar dat kun je niet op de rechthoek zelf (bijvoorbeeld een A4'tje) tekenen. Maar met wat inzicht en de stelling van Thales kun je de middelevenredige van $a$ en $b - a$ tekenen en daarmee ook $\sqrt{(ab)}$. Teken een halve cirkel met straal ($MA =$) ½$a$, teken in het punt ($G$) waar $a$ en $b - a$ tegen elkaar op de middellijn ($AD$) liggen de loodlijn naar de halve cirkel, zie figuur 5. $FG$ is nu de middelevenredige van $a$ en $b - a$, dus $FG = \sqrt{(a(b - a))}$. Nu geldt in driehoek $DFG$ dat $x^2 = h^2 + a^2 = a(b - a) + a^2 = ab$, dus $DF = \sqrt{(ab)}$. Maar omdat driehoek $DFG$ congruent is met driehoek $AEB$ is ook $AE = \sqrt{(ab)}$. Omdat $\angle AFD = 90^\circ$ (Thales) en dus ook $\angle DFE = 90^\circ$, kan met de drie stukken $ABE$, $AFD$ en $FECD$ een vierkant gelegd worden. Schuif $ABE$ omhoog naar $DCE'$ (past, want $AB = DC$) en schuif $AD$ naar $EE'$ (past, want $EC + CE' = EC + BE = BC = AD$). In de workshop waagden de deelnemers zich ook aan de neusismethode om een gegeven hoek in drie even grote hoeken te delen. Met het richten (neuein) van de strook vanuit het hoekpunt moet een vast lijnstukje worden afgepast tussen een cirkelboog en een lijn (die parallel loopt met een van de benen van de gegeven hoek). Voor het bewijs worden Z-hoeken, de hoekensom van een driehoek en gelijkbenige driehoeken (met twee stralen van de cirkel) gebruikt. Voor de constructie met de trisector was te weinig tijd. Wel waagde een aantal deelnemers zich aan de trisectie door origami. In bewijs daarvan wordt




figuur 5 Rechthoek verdelen

veelvuldig gebruikgemaakt van het feit dat een vouw eigenlijk een spiegeling is. Daarmee ontdek je allerlei eigenschappen van driehoeken, zoals gelijkbenigheid en bissectrices. Uiteindelijk kun je daarmee de trisectie bewijzen. Bij de stand van de vereniging en van Epsilon zag ik dat er ook een Zebraboekje verschenen is over de driedeling van een hoek, nummer 41: *Met passer, liniaal en neusislat* van Ad Meskens en Paul Tytgat. Het kado wat de sprekers dit jaar van de organisatie kregen was erg origineel. Een bouwpakket van een mini-strandbeest van Theo Jansen, zie figuur 6. Enkele jaren geleden kwam hij nog met zijn PVC-beesten op het dak van zijn auto ons vertellen hoe hij ze heeft ontworpen en liet ze ook door de zaal lopen. Na een avondje knutselen zat hij in elkaar. En hij doet het! Blazen tegen de propellers of draaien met de aandrijfas zorgt er voor dat het beest loopt. Dank voor dit stukje vernuft. Bij het diner gezellig bijgekletst met Eva, dochter van mijn voormalige rector Roos; even geknuffeld met Anja. Denk niet meteen aan geile Geert van Boer Zoekt Vrouw. Het is hartverwarmend om alle mensen die zo actief zijn in wiskundeland weer te zien. Dus hier en daar een knuffel moet kunnen. Adri zou mij zijn dochter Nienke die ook wiskundedocent is geworden



figuur 6 Mini-strandbeest

nog voorstellen, maar we zijn elkaar misgelopen. Hij vertelde dat ze in Hoorn in de krant komen, want ook zijn vader was wiskundedocent. Drie generaties vol passie voor het vak. De avondlezing over het gat in de prent van Escher, een galerij met een prententententoonstelling aan de haven van Malta, was spectaculair. Hendrik Lenstra legde uit hoe wiskundigen de transformatie van een normaal ruitjespapier kunnen overzetten in een golvend patroon. Je ziet hoe de man die naar een prent staat te kijken in een galerij waar hij zelf op staat, in feite een soort Drostemannetje is dat bij inzoomen telkens weer terugkeert. Dit inzoomen werd in prachtige filmpjes gedemonstreerd.[5] Na de lezing was het tijd voor spelletjes. Samen met Jörgen nam ik plaats aan een tafel met twee dames om met z'n vieren het spel *RoboRama* te spelen, een ingewikkelde Halma-variant waarbij je jouw vier robots met door kaartjes bepaalde zetten naar de hoek diagonaal tegenover de starthoek moet delegeren. De dames deden het beter en eentje won. Een spel met meer *levels*. Maar voor mij op dat moment dus een *Rob-o-Drama*.
Als je de basisversie onder de knie hebt, zijn er moeilijkere varianten te spelen waarbij er zelfs een truck op rupsbanden in de weg gezet kan worden. Na de spelletjes tijd voor de dansvloer. De band 'De Buren' vond ik een succes. Lekkere dansmuziek tot in de kleine uurtjes. Ze waren verbaasd dat wiskundedocenten zo lekker kunnen swingen. Ook met stijldansen kwam ik aan mijn trekken. Marjan was in vorm met de Quickstep, de chachacha, de rumba en de jive. Ik deelde mijn bakje meegenomen cashewnootjes met secties van scholen uit Terneuzen, Helmond en Hoorn.



figuur 7 Plafondkapje van Snowpuppe

De volgende morgen vroeg op voor de FUNRUN. Ik had speciaal nieuwe hardloopschoenen gekocht. Door mijn verkoudheid kon ik voor het eerst niet aan een stuk de 6 km hollen. Af en toe moest ik in de wandelpas. Maar wat een deceptie toen bij de finish bleek dat er **geen** π-shirts waren. We hoorden dat het T-shirt in het teken van het π-jaar is bedrukt. Maar ze lagen nog in Utrecht.

Vorig jaar april las ik in het AD over een klein bedrijfje *Snowpuppe* in Den Haag dat origami in hun ontwerpen gebruikt. Toen ik informeerde of ze een workshop over hun werkwijze en producten wilden geven reageerden ze meteen erg enthousiast. Na overleg met de programmacommissie werd plaats gemaakt voor hun workshop op de NWD. Deze stond direct na het ontbijt op het programma. Kenneth en zijn vrouw Nellianna zijn afgestudeerd in Delft op industriële vormgeving. Kenneth gaf ons een kijkje in zijn keuken. Hij liet zien hoe hij door de gulden snede geïnspireerd is. In zijn ontwerpen komt deze verhouding telkens terug. Hij showde zijn speciale paraplu, maar zijn bedrijf maakt vooral lampekappen (de *Chestnut*) en afdekkapjes tegen het plafond, zie figuur 7 en 8. De deelnemers gingen daarna onder hun leiding aan de slag met het vouwen van een plafondkapje uit een voorgeritst stuk karton. Het was een zeer geanimeerde bedrijvigheid. De in elkaar geflanste kapjes mochten mee naar huis genomen worden. Hij legde tot slot uit hoe hij zijn *Chestnut* lampekap had ontworpen door allerlei lijnen over een cirkelring te tekenen. Eerst acht middellijnen en dan diagonalen die steeds 1 punt verschillen met het diametrale punt. Het is mooi om te horen dat je van een dergelijk concept ook kunt leven.
Omdat ergens dit jaar 14 maart geschreven kan worden als 3-14-'15 ligt het voor de hand om internationaal 2015 uit te roepen tot π-jaar. In dat licht bezien werd een lezing verzorgd door Frits Beukers, auteur van het boekje *Pi*, nummer 6 van de Zebrareeks. De eerste benaderingen van π zijn gevonden door het benaderen van de omtrek via ingesloten en omgeschreven regelmatige veelhoeken bij een cirkel. Archimedes kwam op die manier al tot enkele decimalen van π. Ludolph van Ceulen was zo'n beetje de laatste die op die manier π nog (zonder rekenapparaat) in 35 decimalen wist te benaderen. Door het onderzoek aan reeksen in de zeventiende eeuw ontstonden veel snellere methodes. De infinitesimaalrekening gaf een enorme boost aan het zoeken naar snel convergerende reeksen.

De reeksontwikkeling van

$\arctan(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$ geeft bij

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ echter nog een weinig snel convergerende

reeks. De echte winst werd geboekt toen men met complexe getallen ging werken. Het argument van het

product van twee complexe getallen is gelijk aan de som van de afzonderlijke argumenten (modulo $2\pi$). Men zocht naar handige combinaties om op een bruikbaar rationaal veelvoud van $\pi$ uit te komen. Zo heeft het getal $1 + i$ een hoek van 45°, dus $\frac{\pi}{4}$. Probeer complexe getallen te vinden die vermenigvuldigd op argument 0 uitkomen. Gebruik de reeksen van arctangensen van die argumenten en je hebt een snelle(re) benadering van $\pi$. Machin

vond bijvoorbeeld $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$.

Bedenk dat voor het argument $\varphi$ van $5 - i$ geldt dat $\tan\varphi = -\frac{1}{5}$, dus $\varphi = \arctan(-\frac{1}{5}) = -\arctan(\frac{1}{5})$ en het

argument van $239 + i$ is $\arctan(\frac{1}{239})$. Reken maar na:

$(1 + i)(5 - i)^4(239 + i) = 228488$. Dit is een reëel getal en heeft dus argument 0. Gebruiken we de regel voor het argument van het product, dan zien we:

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{239}) = 0\,.$$

Een geheel nieuwe benadering kwam van de geniale Indiër Ramanujan. Hij vond

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}}\log\left((2\sqrt{2}+\sqrt{10})(3+\sqrt{10})\right).$$

Als ik dat intik op mijn GR, levert dat $\pi \approx 1{,}364376354$ (maar dan moet je voor de log wel de natuurlijke logaritme nemen). Met de opkomst van de computer ging het snel met het aantal decimalen van $\pi$. Interessant is dat de Oekraïense broers Chudnovsky een computer bouwden die hun hele appartement in beslag nam. Er is op internet veel over deze broers te vinden, interessant onderwerp voor in de les?

De slotlezing van de NWD werd verzorgd door Peter Grünwald. Hij liet zien dat de wetenschap vervuild is met zogenaamd bewezen hypothesen door de significantie-toetsen. Er wordt op van alles een toets losgelaten om weer ergens een 'bewijs' voor te hebben. Zo herinnerde ik me iets over chocola eten bij zwangere vrouwen. Ik vond op internet: Het is gebleken dat het eten van chocolade in de eerste drie maanden van de zwangerschap het risico op zwangerschapsvergiftiging met 19% verlaagt. Vrijwel elke week lees je wel over een of ander onderzoek waarmee een of ander verband wordt aangetoond. Peter begon met te stellen dat het publiek significant paranormaal is voor het vermoeden achter welk gordijn een erotisch plaatje zit. Hij toonde een dia met naast elkaar twee dichte gordijnen. Achter een van de twee hangt een (erotisch getint) plaatje. Met je smartphone kon je kiezen voor Links of Rechts. Het publiek koos overduidelijk voor Links. Hij 'schoof' het gordijn open en ja hoor, het erotische plaatje hing Links. Er is nu significant bewezen dat het publiek over paranormale gaven bezit. Hoe komt dit? Kiezen we nu eenmaal vaker voor Links als je mag kiezen voor Links of Rechts? Wat zeggen de *p*-waardes die gevonden worden? We concluderen te gemakkelijk dat bij een *p*-waarde onder de betrouwbaarheid $\alpha$, meestal 5% genomen, dat de nulhypothese verworpen moet worden en dat die dus helemaal fout is. Maar hoe groot de werkelijke $\mu$ of $p$ van de alternatieve hypothese moet zijn, weet je dan nog steeds niet. Misschien ligt die wel dicht bij die van $H_0$. De *Prosecutor's fallacy* is een vaak voorkomend fenomeen. Er worden denkfouten gemaakt bij het waarderen van het bewijs bij het gebruik van kansrekening bij strafzaken. Je wilt zo graag het bewijs dat je de dader hebt, dat je uit het oog verliest wat je eigenlijk statistisch bewijst.
Enigszins in verwarring verlaten we de zaal om de lunch te nuttigen. We praten nog wat na met deze en gene. Dan komen de collega's die met me zijn meegereden me ophalen; of ik ze weer veilig thuis wil brengen. Natuurlijk, maar pas nadat we onderweg de bekende drie bossen tulpen voor € 5 hebben opgepikt voor onze liefjes. Het waren ondanks het koude weer een paar warme dagen waaraan ik met plezier terugdenk.



figuur 8 Chestnut lampekap

## Noten

[1] Zie *www.fisme.science.uu.nl/nwd/*
[2] Zie *vakbladeuclides.nl/906vanoord*
[3] Hart, K.P. (2000). De Cycloïde. *Pythagoras, 39*(4), 30-31, *www.pyth.eu/nummer.php?id=240*
[4] Aarts, J.M., Broer, H.W. (2010). *Schoolmeetkunde in het Horologium Oscillatorium van Christiaan Huygens*. Universiteit Groningen (pre-print), *www.math.rug.nl/~broer/pdf/aarts*
[5] Zie *http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/*

## Over de auteur

Rob van Oord was sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

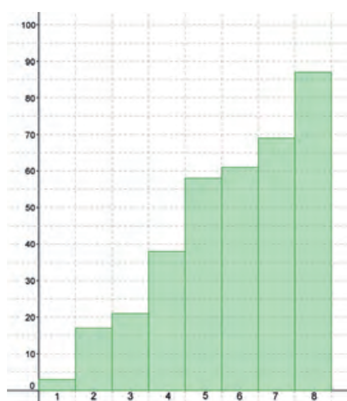
# VASTGEROEST

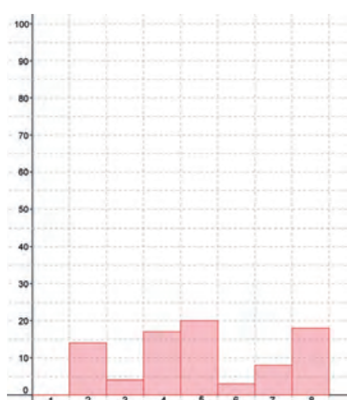
## DE UITDAGING

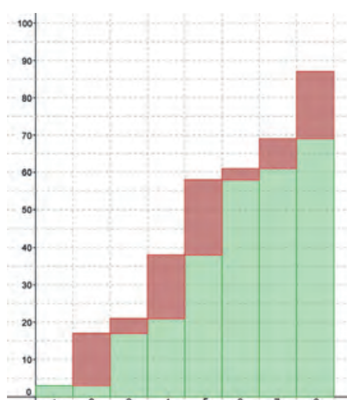
Ab van der Roest

Ab van der Roest daagt zijn leerlingen uit met een probleem. De opbrengst: geïnteresseerde leerlingen en een chocoladereep.

Een van de leuke kanten van het docentschap is dat er leerlingen zijn die je kunt uitdagen. Ik doe dat met een raadsel of een probleem dat ik zelf uiteraard heel goed begrijp en overzie. Het uitdagen gaat soms gepaard met een weddenschap en de standaardbeloning die ik vraag, is dan altijd een reep chocolade. Om een leerling echt te interesseren, moet je natuurlijk wel een goed probleem hebben. Deze week werd er me één gepresenteerd. Ik doe mee aan een docentontwikkelteam (DOT) in Nijmegen en Ton Konings presenteerde het.







Neem acht getallen tussen 0 en 100 en schrijf die op in volgorde van grootte. Neem van elk twee opvolgende getallen de verschillen en tel die bij elkaar op.

Als je wedt met je leerling dat je dit uit het hoofd sneller kan dan hij met een rekenmachine, dan is de winst echt voor jou. Aantrekkelijk dus!
Voorbeeld: een leerling kiest de getallen 3, 17, 21, 38, 58, 61, 69 en 87. Zodra die op volgorde staan, denk je twee keer diep na en zeg je: 84 is het antwoord. De leerling controleert dit met zijn rekenmachine:
17 – 3 = 14
21 – 17 = 4
38 – 21 = 17
58 – 38 = 20
61 – 58 = 3
69 – 61 = 8
87 – 69 = 18
En 14 + 4 + 17 + 20 + 3 + 8 +18 = 84. Het goede antwoord en sneller dan de leerling. Chocoladereep verdiend!

De leerling betreurt het verlies van de reep, maar krijgt een tweede kans. Als hij of iemand anders uit de klas kan uitleggen dat het antwoord via de som
87 – 3 = 84 verkregen kan worden, dan hoeft er geen chocoladereep uitgekeerd te worden.
Je ziet het waarschijnlijk wel: $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_8 - a_7) = a_8 - a_1$. Grafisch is het nog veel mooier, zoals het `stripverhaal' in de figuur laat zien.
Met dit rekengrapje kun je in elke klas terecht, maar speciaal in 6 vwo. Het schijnt dat bovenstaande wetmatigheid Leibniz hielp bij het vinden van de hoofdstelling van de integraalrekening: noem het rijtje getallen de primitieve *F*, noem het verschilrijtje de functie *f*, noem de som de integraal, dan geldt: *F*(laatste) – *F*(eerste) = integraal van de functie *f*. Ik denk dat dit niet een manier is om de hoofdstelling uit te leggen, maar wel om achteraf nog eens het begrijpen te bekrachtigen, en om leerlingen op chocola te trakteren.

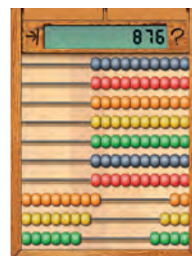
### Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

# RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

## STICK MATH HD

Lonneke Boels




Met lucifers getallen maken klinkt ouderwets, maar Lonneke Boels laat zien dat het digitaal een heel leerzaam spel oplevert.




figuur 1 Door het verleggen van één lucifer wordt deze berekening kloppend




figuur 2 Scores na 10 ronden

Het doel van dit spel met lucifers is om de berekening door het verleggen van één lucifer kloppend te maken; een leuk spel voor in de vakantie of voor de laatste tien minuten van de les. Hoe werkt het spel? Je kiest eerst welk type berekening je wilt: optelling of vermenigvuldiging of door elkaar. Bij een vermenigvuldiging krijg je dan bijvoorbeeld 6 × 6 = 56 als berekening, zie figuur 1. Je kunt van de 5 een 3 maken door één lucifer te verschuiven. Dan krijg je 6 × 6 = 36 en klopt de berekening dus. Als zelfstandig spel is het leuk voor de onderbouw en voor de basisschool. Voor hogere klassen is het spel interessant te maken door als docent er extra vragen over te stellen. Bijvoorbeeld: zijn alle berekeningen mogelijk? Een voorbeeld: is 1 × 10 = 10 mogelijk na het verleggen van één lucifer terwijl je toch met echte getallen start? Kun je dat bewijzen? Hoeveel verschillende antwoorden kun je maken bij een berekening? Verder kun je de leerlingen ook een tabel laten maken met mogelijke 'omzettingen', zie onderstaande tabel. Daarbij is de beperking dat er maar één lucifer mag worden verplaatst, weggehaald of bijgevoegd. Door deze vragen wordt het een wiskundige activiteit uit onder andere het domein kansrekening en statistiek.

| Cijfer | Omzetten in... | Hoe? |
|---|---|---|
| 1 | 7 | Lucifer van ander cijfer weghalen en bovenaan horizontaal leggen |
| 2 | 3 | Verticale lucifer linksonder naar rechtsonder verplaatsen. |
| 3 | 2 | Verticale lucifer rechtsonder naar linksonder verplaatsen |
| | 5 | Verticale lucifer rechtsboven naar linksboven verplaatsen |
| | 9 | Lucifer van ander cijfer verticaal linksboven plaatsen |
| ... | ... | ... |

**Pluspunten**

- wie vooraf bedenkt welke omzettingen mogelijk zijn, heeft een voordeel en is dus sneller klaar;
- het is een echt puzzeltje;
- de 1F-rekenvaardigheden van de basisschool worden weer even getraind;
- je kunt kiezen tussen optellingen tot 20, vermenigvuldigingen (tafels 1 – 10) of door elkaar;
- soms is de opgave al goed. Dan vergt het extra denkwerk om te zien dat een verandering ook tot een correcte berekening leidt.




figuur 3 Het spel

**Minpunten**

- het is lastig om de 7 goed neer te leggen. Hierdoor lijkt een correcte oplossing soms niet goedgekeurd te worden. Probeer het nog enkele malen en leg de lucifer iets preciezer neer, dan lukt het wel;
- bij een foutje ben je af en begin je helemaal opnieuw;
- soms zijn de opgaven erg moeilijk of zie je de oplossing niet. Als je de iPad dan even uitzet, kun je weer opnieuw beginnen, ook al laat je het spel open staan;
- heel af en toe krijg je reclame voor een soort scorebord;
- het is onduidelijk wat een hoger niveau inhoudt;
- er zit geen help op;
- je kunt hem niet op pauze zetten;
- soms krijg je tweemaal dezelfde opgave in één serie van 10;
- na niveau 10 begin je weer opnieuw.

Geschikt voor: basisschool groep 3, 4, 5 (alleen optellen), 6, 7, 8 en klas 3, 4 vmbo, brugklas havo en vwo, misschien ook tweede klas havo; hogere klassen alleen als de docent er extra vragen bij stelt. Eindoordeel: aanschaffen. Kosten: gratis Getest op: iPad met iOS7. Ook geschikt voor: IOS3.2 of hoger.

### Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

# BOEKBESPREKING

## SPIROSPOREN

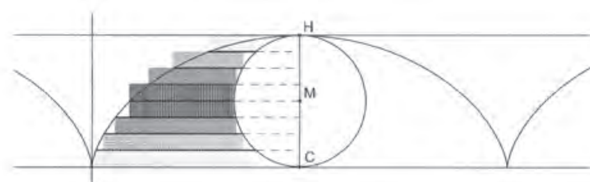


Floor van Lamoen




**Ondertitel: tekenen met de spirograaf**
**Auteurs: Stephan Berendonk en Leon van den Broek**
**Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013)**
**Zebrareeks, deel 38**
**ISBN: 978-90-5041-139-4**
**Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback)**

*SpiroSporen*, al verschenen in 2013, is alweer het achtendertigste deel van de Zebrareeks. Ooit begon de serie om materiaal te leveren voor 'zebrablokken' in de Tweede Fase van het vwo. Die zebrablokken zijn er niet meer (wel keuzeonderwerpen) en inmiddels is de serie wat breder gericht op vwo-leerlingen en iedereen die geïnteresseerd is in wiskunde. De boekjes zijn onder collega's in trek voor praktische opdrachten en profielwerkstukken op het vwo. *SpiroSporen* past goed in deze reeks. Het is meer een doeboek dan een leesboek, dit in tegenstelling tot enkele andere delen, maar daarmee leent het zich uitstekend om leerlingen aan het werk te zetten. Vrijwel alle theorie van het boekje wordt door middel van opgaven aangeboden en verwerkt. Voor de breder in wiskunde geïnteresseerde die vooral graag leest, is het daarom wat minder geschikt. De spirograaf is speelgoed dat in 1966 op de markt verscheen, en bestaat uit een set ronde kunststof tandwielen met gaatjes op verschillende afstanden van het middelpunt en een aantal andere voorwerpen, zoals ringen en rechte strips, voorzien van getande randen. De tandwielen kunnen om elkaar of langs de getande randen van de andere voorwerpen draaien. Een pen of potlood in een van de gaatjes zorgt ervoor dat diverse patronen kunnen worden getekend. Een typisch product uit de flowerpowertijd, met veel bloemachtige patronen als resultaat! Er zijn diverse websites te vinden waar met een applet dergelijke figuren kunnen worden gemaakt en bij het boekje zit een miniset. Toen ik jong was, heb ik ook zo'n spirograafset gehad en mooie figuren getekend. Maar al gauw werd ik er te ongeduldig voor. Wiskundige vragen heb ik er toen nooit bij gehad, maar dit boekje openslaand worden ze natuurlijk meteen in hoofdstuk 1 naar voren gebracht. Stephan Berendonk en Leon van den Broek slagen er met deze vragen in om de lezer geboeid te krijgen voor de wiskunde achter het speeltje. Een aantal vragen krijgt hun antwoord in een van de vijf werkstukken waarmee dit boekje eindigt. Ik werd bijvoorbeeld gegrepen door de vraag: geven verschillende wielen ook verschillende krommen? Het antwoord zit verscholen in het vierde werkstuk dat erop is gericht te laten zien dat een kromme die je met drie wielen tekent ook met twee kan worden getekend. Oh, heerlijk. Nog zo'n heerlijk moment vind ik in hoofdstuk 3 dat handelt over de cycloïdeboog (de 'ventielkromme'). Natuurlijk is het voor een wiskunde B-leerling een voor



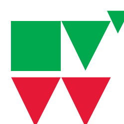

de hand liggende vraag om te willen weten wat de oppervlakte onder deze kromme is. De Riemann-sommen komen naar boven, maar... nee. Zo doen we dat in dit boekje niet. Berendonk en Van den Broek nemen de lezer en sommenmaker vakkundig mee aan de hand en laten met een simpele truc zien wat de oppervlakte is. Juweeltje. Het boekje is in heel zijn opzet duidelijk gericht op vwo-leerlingen met wiskunde B. De stof zal ook zeker passen bij het vernieuwde B-programma. Volgens de inleiding heeft het figuratieve ook wiskunde C-aspecten, maar eerlijk gezegd vind ik die niet zo uit de verf komen. Het figuratieve deel van de spirograaftekeningen wordt niet al te ver uitgesponnen en dat is voor hen jammer. Het had ook allemaal uitgebreider gekund. Ik mis bijvoorbeeld de baan van de maan om de zon en de Octopus op de kermis een beetje. Maar ja, de boekjes uit de Zebrareeks zijn nu eenmaal ongeveer 50 pagina's dik en die 50 pagina's zijn ruim gevuld. De antwoorden op de vele vragen in het boekje zijn al verhuisd naar de website van de uitgever, iets dat lekker dwingt om echt zelf aan de slag te gaan. Met de beperking van de omvang een zeer geslaagd boekje.

### Over de auteur

Floor van Lamoen is sinds 1990 leraar wiskunde, sinds 1995 verbonden aan het Ostrea Lyceum te Goes.
E-mailadres: *fvanlamoen@planet.nl*

# JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2015

Marianne Lambriex



## Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2015 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 7 november 2015**. Aanvang: 10:00 uur. Sluiting: 16:00 uur. Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

## Themagedeelte van de studiedag

**Voor de verandering…**

Voor of tegen verandering in wiskundeonderwijs maakt, in ieder geval voor onder- en bovenbouwdocenten havo/vwo, nu niet echt meer uit. In november bent u in de vierde klas ook druk bezig de nieuwe examenprogramma's te onderwijzen. Bent u gelukkig met de wiskundemethode die u en uw leerlingen moet ondersteunen om naar een vernieuwd examen toe te werken? Lijkt het u leuk om samen met collega's daarover te praten in november? Wilt u graag informatie van docenten die al langer bezig zijn met de implementatie van de nieuwe programma's? Dat kan uiteraard.

Maar er is meer waar u aan kunt denken bij 'Voor de verandering'. Gewoon eens iets anders doen met een les (of meer) om uw leerlingen echt mee te krijgen in diverse aspecten van wiskunde. Bent u, voor de verandering, wel eens bezig met

- een leuke les(senserie) opzetten en doorwerken met uw leerlingen die het sommetjes-maken-uit-het-boek ontstijgt?
- eens buiten de deur gaan kijken met uw leerlingen (denk aan wiskundewandeling, Nemo, Boerhaave, …)?
- een inspirerende persoon uit het bedrijfsleven in de les uitnodigen om uw leerlingen te laten ervaren dat wiskunde in veel beroepen echt nodig en nuttig is?
- meedoen aan een van de vele wiskunde-uitdagingen die er zijn: Wiskunde Onderbouwdag, Wiskunde B-dag, Wiskunde A-lympiade, Wiskunde Olympiade, Nijmeegse wiskundewedstrijd, Kangoeroe, …?
- denken en praten over nieuwe, beter passende wiskundeprogramma's voor vmbo. Vmbo lijkt een 'stiefkindje' bij OCW en andere instanties. Schande, toch? Er wordt, ook vanuit het bestuur van de NVvW, nagedacht over vernieuwde programma's voor vmbo wiskunde. Wilt u meedenken daarover? Welkom!
- samenwerken met docenten van andere vakken: hoe gebruiken collega's van andere vakken technieken en concepten van de wiskunde? Kan dat beter worden afgestemd? Hoe organiseren collega's dat?
- denken over zelf een workshop verzorgen op de studiedag omdat u een leuk idee hebt voor inspirerende lessen wiskunde, in plaats van alleen maar een workshop te volgen?

Op de studiedag willen wij graag ruimte bieden aan beide aspecten van 'Voor de verandering'. Wij zijn voor continue verandering, in de betekenis van 'Blijf alert op de huidige en toekomstige situatie in wiskunde-onderwijsland en hoe u daarop kunt en wilt inspelen'. En ook: wij willen graag inspirerende workshops van bevlogen collega's. Wij nodigen u uit om een voorstel voor een workshop in te dienen. Om een en ander goed georganiseerd te krijgen voor begin september, willen we graag uiterlijk 15 juni uw reactie. Stuur uw voorstel naar Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadres: *l.j.b.wesker-elzinga@hva.nl*) of Henk van der Kooij (e-mailadres: *h.vanderkooij@uu.nl*).

## Agenda

10:00 – 11:00 **Jaarvergadering**

1. Opening door de voorzitter
2. Jaarrede door de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2014
4. Jaarverslagen 2014/2015 NVvW en *Euclides*
5. Jaarrekening en balans 2014/2015, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing
7. Rondvraag
8. Sluiting van de jaarvergadering.



### Programma Studiedag

| | |
|---|---|
| 11:00 – 11:15 | Inleiding op de studiedag |
| 11:15 – 12:00 | Plenaire lezing |
| 12:00 – 12:15 | Koffie/thee |
| 12:15 – 13:15 | Workshopronde 1 |
| 13:15 – 14:00 | Lunchpauze, marktbezoek |
| 14:00 – 15:00 | Workshopronde 2 |
| 15:00 – 15:20 | Koffie/thee |
| 15:20 – 16:00 | Plenaire voordracht |
| 16:00 – 16:10 | Afsluiting. |

**Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 7 november NVvW–dag**

In het volgende nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 7 november 2015. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

# HET LERARENREGISTER

## STAND VAN ZAKEN

Marianne Lambriex




Het afgelopen jaar is er hard gewerkt aan het verder opzetten van een Register van, voor en door docenten. Daaraan dragen veel leden van de NVvW een steentje bij.

### De Onderwijscoöperatie

Zo vertegenwoordigen deze leden zowel het PVVVO als de FvOv in diverse geledingen van de Onderwijscoöperatie (OC), die op haar beurt onze beroepsgroep vertegenwoordigt. In figuur 1 staat een organogram van de OC en we hebben zitting onder andere in de Leraren Advies Raad, in Leraar24, in de werkgroep bekwaamheid en in de (sub)registercommissie. Over de werkzaamheden van die registercommissie en de sub-registercommissies gaat dit artikel. Er zijn op dit moment meer dan 14000 docenten ingeschreven; hoeveel hiervan wiskundedocent zijn is nog niet na te gaan. De site *registerleraar.nl* is, evenals de achterliggende organisatie, nog in opbouw, en wordt als gevolg van voortschrijdende inzichten regelmatig aangepast, als de middelen dat toelaten.

### De registercommissie

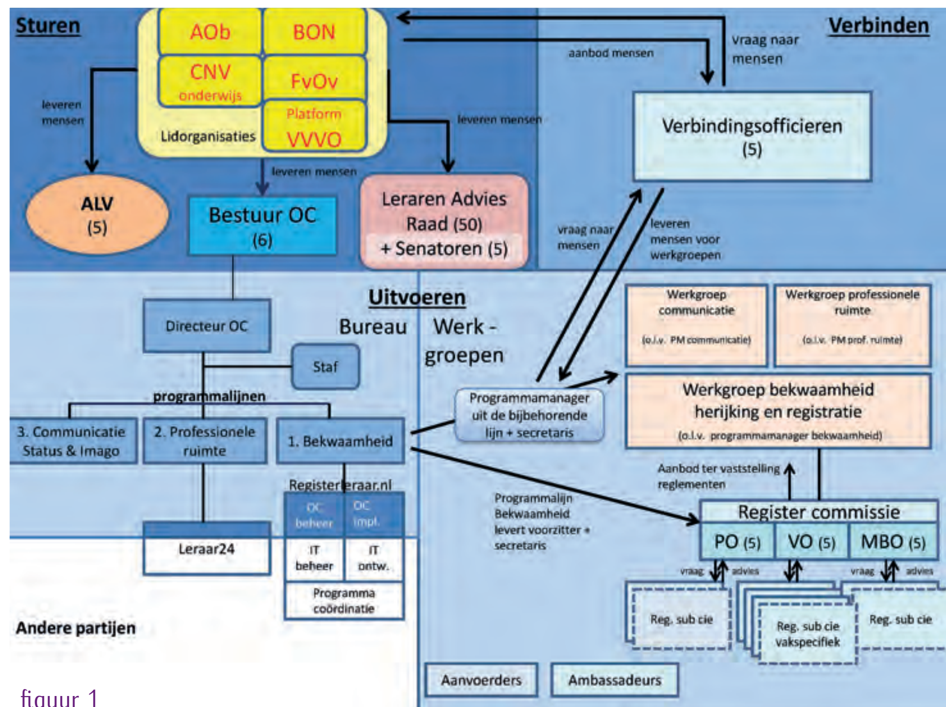
De registercommissie bestaat uit vijftien leden en beslaat de drie sectoren po, vo en mbo. Elke lidorganisatie (onder andere PVVVO en FvOv) is vertegenwoordigd in elke sector. De taken van de registercommissie zijn het ontwerpen van reglementen, de registratie en herregistratie van leraren en het valideren van de professionaliseringsactiviteiten (PA's). De registratie van leraren en het valideren van de PA's zijn in volle gang, het reglement wordt gaandeweg het valideren ontworpen en aangepast. De herregistratie is nog een punt van zorg en is in ontwikkeling, dat is ook mede afhankelijk van het aanbod van gevalideerde PA's, de voortgang van de website en voortschrijdende inzichten. In het afgelopen jaar is er een stijgende lijn te zien van het aantal PA's (over alle vakgebieden) dat wordt ingediend ter validatie. Het betreft nu zo'n 1800 activiteiten van bijna 500 aanbieders. Het overgrote deel is inhoudelijk van goede kwaliteit en kan worden goedgekeurd. Zo'n PA ontvangt dan het stempel van Registerleraar met het unieke nummer van de activiteit en het aantal RU (1 RU is een registeruur en staat gelijk met een contact- of zelfstudie-uur) en wordt op de site van de aanbieder bij die PA getoond.

### Subregistercommissie

In het VO is het van belang of een PA een vakspecifieke component heeft, omdat om voor herregistratie in aanmerking te komen een docent gedurende vier jaar 40 van de 160 uur professionalisering vakspecifiek dient in te vullen. Deze vakspecifieke PA's worden eerst voorgelegd aan een (sub)registercommissie die bestaat uit docenten uit dat vakgebied. Zo is er een subcommissie voor

wiskunde, voor rekenen, voor NLT, voor MVT, voor Nederlands, etc. Deze subcommissies adviseren de registercommissie en baseren dat advies op een onderzoek waarin de volgende vragen centraal staan:

1. is het relevant voor vakleraren?
   a. gericht op bekwaamheidsontwikkeling van leraren;
   b. leren van leerlingen;
   c. actuele ontwikkelingen in vak/beroepspraktijk.
2. levert het een bijdrage aan het primaire proces? Met name vakinhoud, vakdidactiek en pedagogiek
3. voldoende informatie (met verwijzing naar bijlage en site);
4. is aanbod, opleider en aanbieder op hbo-bachelor niveau?
5. totale aantal RU reëel? Omvang vakinhoudelijke RU reëel?



figuur 1

## Vakspecifiek: vakinhoud en vakdidactiek

Momenteel worden de uren van een PA over drie categorieën verdeeld:

- vakspecifiek: vakinhoud en vakdidactiek;
- pedagogiek;
- algemeen professioneel handelen.

Het merendeel van de aangeboden PA's is van de laatste twee categorieën, en tijdens de validatie levert het indelen hiervan geen probleem op. Een klein deel van het aanbod is vakspecifiek en dat aandeel zal zeker moeten groeien. Juist deze categorie: vakinhoud en vakdidactiek levert wel problemen. Verbazingwekkend speelt dat nauwelijks bij andere vakken, maar bij wiskunde is dit een regelmatig terugkerend punt van heftige discussies, en zijn er voorstanders van het scheiden van deze twee in een categorie voor vakinhoud en een voor vakdidactiek, en zo dat die 40 uur vakspecifiek enkel tellen voor vakinhoud. Daarbij spelen de volgende vragen steeds op:

- is het zinvol je in vakdidactiek te verdiepen zonder vakinhoud daarbij te betrekken? Ofwel, kun je ze scheiden?
- is het scheiden van vakinhoud en vakdidactiek voor een wiskundedocent wel van belang?
- een wiskundedocent is een wiskundige, en moet zich ook verdiepen en blijven scholen in de wiskunde zelf;
- het register is voor wiskundedocenten en niet voor wiskundigen.

Welke kant deze discussie uitgaat, is nog niet bekend.



## Van, voor en door de leraar

Dit jaar was een woelig jaar, zoals u ongetwijfeld in de media heeft kunnen volgen; u weet dan dat het Register momenteel een speelbal is in de politiek. De OC en alle belanghebbenden proberen met al hun middelen de eigenaar te blijven van dit Register, zodat het van, voor en door de leraar blijft. We zullen zien hoe dat in de toekomst uitpakt. Maar hoe meer docenten zich vrijwillig registreren, hoe meer het Register kan laten zien dat het van de leraar zelf is en hoe meer de leraar zeggenschap heeft over zijn eigen professionaliteit. Het bestuur en de leden van de NVvW blijven zich inzetten om de kwaliteit van het wiskundeonderwijs en van de wiskundedocent te waarborgen.

Marianne Lambriex
Bestuur NVvW
Lid Registercommissie vo

PUZZEL 90-6

# VERVOLG OP 90-4: BIJZONDERE ISO-AFSTANDSLIJNEN

Lieke de Rooij
Wobien Doyer



In puzzel 90-4 zagen we dat alle punten die een gelijke afstandssom hebben tot de zijden van een veelhoek een te construeren rechte lijn vormen. En de iso-afstandslijnen, de lijnen die alle punten met gelijke afstandssom verbinden, zijn evenwijdige rechte lijnen. In de uitwerking van 90-4, zie volgende pagina, kunt u nalezen hoe u die lijnen kunt construeren en dat mag u gebruiken voor deze puzzel. Voor sommige driehoeken geldt dat een bijzondere lijn in de driehoek een iso-afstandslijn is.

**Opgave 1** – Toon aan dat een van de bissectrices in de driehoek met zijden *a*, *b* en *c* als $(a,b,c) = (3,4,5)$, een van de iso-afstandslijnen is.

In de volgende opgaven wordt steeds de constructie van een driehoek gevraagd waarbij een bepaalde bijzondere lijn in de driehoek een iso-afstandslijn is. Het is ook voldoende om de constructie te beschrijven. Er zijn in alle gevallen vele driehoeken mogelijk. Er zijn steeds twee elementen gegeven (een hoek en een zijde of twee zijden). U kiest zelf steeds welke elementen dat zijn. Het zal blijken dat er beperkingen zijn aan de waarden die die elementen kunnen aannemen. We vragen u ook om aan te tonen dat uw constructies kloppen.

Behalve de 3-4-5 driehoek zijn er meer driehoeken waarvan alle punten op een van de bissectrices een gelijke totale afstandssom hebben.

**Opgave 2a** – Bepaal een constructie (met bewijs) van een driehoek *ABC*, waarvan een van de iso-afstandslijnen de bissectrice is uit *C*. Tip: U kunt gebruikmaken van de constructiemethode uit puzzel 90-4 opgave 3 en de bissectrice-stelling die zegt dat in driehoek *ABC* met bissectrice *CD* en *D* op *AB* geldt dat $AD/DB = AC/BC$.

**Opgave 2b** – Als een bissectrice iso-afstandslijn is, dan is er een verrassend eenvoudige relatie tussen de zijden *a*, *b* en *c*. Welke? Uit dat resultaat zal blijken waar punt *C* kan liggen als *A* en *B* bekend zijn.

**Opgave 3** – Idem voor een hoogtelijn of, en dat is hetzelfde, voor een middelloodlijn. Hierbij is ook een relatie te bepalen tussen *a*, *b* en *c*, maar die is minder mooi en daarom optioneel voor de liefhebbers.

**Opgave 4** – Idem (constructie + relatie) voor een zwaartelijn.

**Inzenden oplossingen**
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. Inzendingen moeten uiterlijk op 20 juni 2015 binnen zijn.

UITWERKING PUZZEL 90-4

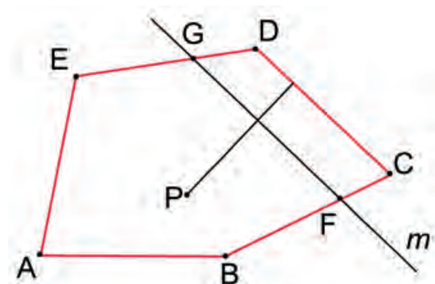
# SOM GERICHTE AFSTANDEN TOT EEN N-HOEK

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

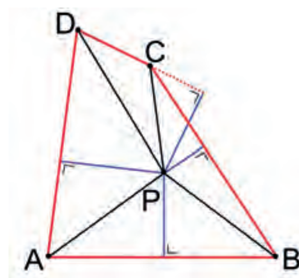
Voor een convexe *n*-hoek werd de afstandssom *d*(*P*) als volgt gedefinieerd: De som van de kortste afstanden van punt *P* tot de zijden die de *n*-hoek insluiten. Daarbij werd de afstand tot een zijde positief genomen als *P* en het binnengebied van de *n*-hoek aan dezelfde kant van die zijde liggen, anders negatief. Voor een gelijkzijdige driehoek is die afstandssom overal in het vlak gelijk, wat eenvoudig te bewijzen is met behulp van oppervlakten.

**Opgave 1** – Welke andere *n*-hoeken hebben deze eigenschap?
De meesten noemden onder andere gelijkzijdige *n*-hoeken, niet per se regelmatig (bewijs met oppervlakten) en *n*-hoeken (*n* even) waarbij paren overstaande zijden evenwijdig zijn (bewijs: de som van de afstanden tot twee overstaande zijden is dan constant). Maar er zijn er meer.
We kunnen alle oplossingen verkrijgen door van gelijkzijdige *n*-hoeken een of meer van de zijden evenwijdig te verschuiven zodat we *n*-hoeken krijgen die niet meer gelijkzijdig zijn. Zie figuur 1. Het verschil tussen de afstandssom van *P* tot *ABCDE* en tot *ABFGE* is de afstand tussen de evenwijdige lijnen *FG* en *CD*, en dus onafhankelijk van *P*.
Dat dit alle oplossingen zijn, blijkt onder andere uit de analytische aanpak van J. Meerhof. Voor een *n*-hoek stelt hij een uitdrukking op voor de afstandssom van een punt *P*(*x*,*y*). Uit de eis dat die onafhankelijk moet zijn van *x* en *y*, volgt een vergelijking waaruit blijkt dat de zijden van de *n*-hoek loodrecht moeten staan op *n* eenheidsvectoren met som 0. Hij construeert die *n* eenheidsvectoren met som = 0 in de eenheidscirkel en kan dan de daarop loodrecht staande zijden gemakkelijk tekenen.
Dat evenwijdige verschuiving van de zijden van een gelijkzijdige *n*-hoek dezelfde oplossingen oplevert, is eenvoudig te zien door de zijden van de gelijkzijdige *n*-hoek te zien als vectoren van gelijke lengte, die in een cykel liggen en dus is hun som 0. Roteren we ze over 90° en verschuiven we ze zodat ze in hetzelfde punt beginnen dan is de som nog steeds 0 en hebben we de constructie van Jan Meerhof.

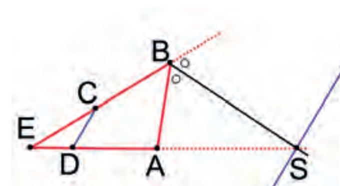
**Opgave 2** – *ABCD* is een convexe vierhoek met drie gelijke zijden. *CD* is de afwijkende – kortste – zijde. Bewijs dat *d*(*C*) = *d*(*D*) en dat de lijn door *C* en *D* de meetkundige plaats is van alle punten *P* met *d*(*P*)=*d*(*C*).
Laat *AB* = *BC* = *DA* = 2 en *CD* = 2*k* < 2, zie figuur 2. Kies *P* in het inwendige van de vierhoek. Trek *PA*, *PB*, *PC* en *PD* zodat de vierhoek in vier driehoeken wordt verdeeld. *d*(*P*) is gelijk aan de som van de (blauwe) loodlijnen op de zijden van de vierhoek, en dit zijn tevens hoogtelijnen in de vier driehoeken. We noemen de lengten van die hoogtelijnen $h_{AB}$ enzovoort. Door de oppervlakten van de driehoeken op te tellen, krijgen we dan:
$\text{Opp}_{ABCD} = h_{AB} + h_{BC} + h_{AD} + k \cdot h_{CD} = d(P) + (k-1)h_{CD}$. Of: $d(P) = \text{Opp}_{ABCD} + (1-k) \cdot h_{CD}$. Dit is constant voor alle punten met gelijke $h_{CD}$ en dus voor alle punten op lijnen evenwijdig aan *CD* en dus ook voor *CD* zelf. q.e.d.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

**Opgave 3** – Gegeven een driehoek en een punt $P$ daarbinnen. Gevraagd een constructie van de meetkundige plaats van alle punten met afstandssom gelijk aan $d(P)$ en toon aan dat die constructie klopt. We kiezen een driehoek $ABE$, waarin $AB$ de kortste zijde is, en punten $D$ op $AE$ en $C$ op $BE$ zodanig dat $AB = AD = BC$. Zie hiervoor ook figuur 2. Uit wat we vonden in opgave 2 volgt dan dat $d(P) = \text{Opp}_{ABCD} - \text{Opp}_{DPC}$ (of + als $P$ aan de andere kant van $CD$ ligt). De gevraagde meetkundige plaats is dan de lijn door $P$ evenwijdig aan $CD$.
We gaven zonder bewijs de volgende stelling: Met uitzondering van de $n$-hoeken waarbij alle punten een gelijke afstandssom hebben, geldt: De iso-afstandslijnen zijn evenwijdige rechte lijnen.
In het voorafgaande hebben we die stelling voor driehoeken al bewezen. Voor grotere $n$ mocht u het in de volgende twee opgaven aannemen. Enkele inzenders hebben de stelling, ook voor $n > 3$, bewezen. Een mooi voorbeeld is de in opgave 1 al genoemde analytische aanpak van J. Meerhof. Uit de opgestelde formule van de afstandssom bewijst hij meteen ook de stelling.

**Opgave 4** – Bepaal een lijn waarop punten $P$ liggen met $d(P) = 0$ bij een driehoek.
We weten dat die lijn evenwijdig moet zijn met de lijn $CD$ uit de vorige opgave. We hebben dus aan één punt met $d(P) = 0$ genoeg. We zouden daarvoor de formule die we in opgave 2 vonden, kunnen gebruiken, maar er is een directere manier. Zie figuur 3. In de driehoek $ABE$ is het lijnstuk $CD$ uit opgave 3 geconstrueerd. Punten waarvan de som van de afstanden tot $AB$ en $BE$ gelijk 0 is, liggen op de buitenbissectrice van hoekpunt $B$ (de afstanden tot $AB$ en $BE$ zijn gelijk, maar volgens onze definitie met tegengesteld teken) Punten met afstand 0 tot $AE$ liggen natuurlijk op (het verlengde van) $AE$. De gezochte lijn gaat dus door het snijpunt $S$ van de buitenbissectrice en het verlengde van $AE$ en is evenwijdig aan $CD$.

**Opgave 5 –** Bepaal de meetkundige plaats van alle punten $P$ met $d(P) = 0$ in een convexe vierhoek.
We kunnen van vierhoek $ABCD$ de buitenbissectrices van alle vier de hoekpunten tekenen. Merk op dat voor punten op die buitenbissectrices de afstanden tot de twee aangrenzende zijden gelijk en tegengesteld zijn. Het snijpunt van de buitenbissectrices van $A$ en $C$ is $S$ en heeft dus afstandssom 0 tot de vierhoek. Hetzelfde geldt voor het snijpunt $T$ van de buitenbissectrices van $B$ en $D$. De lijn door $S$ en $T$ is de gevraagde meetkundige plaats.

N.B. Bij deze opgaven moet formeel ook worden aangetoond dat de eigenschappen ook gelden voor punten buiten de $n$-hoeken. In alle gevallen kan dat met een redenering analoog aan die voor een punt binnen de $n$-hoeken. Als die redenering niet werd gegeven, hebben we dat door de vingers gezien.

## LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 90-4 is:

| Naam | Punten |
|---|---|
| H. Linders | 188 |
| J. Remijn | 182 |
| R. Stolwijk | 171 |
| J. Guichelaar | 156 |
| K. van der Straaten | 146 |
| J. Verbakel | 110 |
| F. Göbel | 107 |
| G. Bouwhuis | 98 |
| K. Vugs | 87 |
| H. Klein | 84 |

De ladderprijs is gewonnen door Hans Linders.
Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

**Redactie**
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

**Inzenden bijdragen**
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

**Richtlijnen voor artikelen**
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

**Realisatie**
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
Website: www.nvvw.nl

**Voorzitter**
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

**Secretaris**
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

**Ledenadministratie**
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

**Helpdesk rechtspositie**
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

**Lidmaatschap**
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Abonnementen *Euclides* niet-leden**
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Advertenties en bijsluiters**
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

## 2015

**wo 10/6**
NIJMEGEN
WiskundeDialoog, nascholingsdag
Organisatie Radboud PUC of Science en het Instituut Leraar en School (ILS).

**vr/za 21/8 22/8**
AMSTERDAM
Vakantiecursus wiskunde, zie *www.platformwiskunde.nl*
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

**vr/za 28/8 29/8**
EINDHOVEN
Vakantiecursus wiskunde, zie *www.platformwiskunde.nl*
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

**do 17/9**
Jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

**vr 18/9**
EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

**za 19/9**
UTRECHT
Symposium WGRWO
Organisatie NVvW

**za 7/11**
VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag, zie ook pagina 39
Organisatie NVvW

**vr 13/11**
EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

## 2016

**18/01 - 28/01**
18 januari tot 28 januari, landelijk
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

**JAARGANG 90**

| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 7 | 30 juni 2015 | 18 mei 2015 |

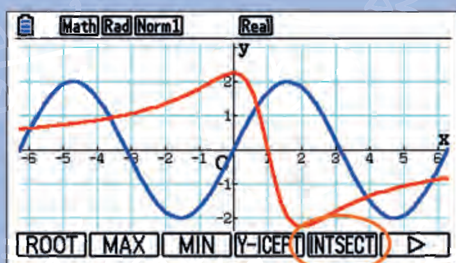
**JAARGANG 91**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 september 2015 | 22 juni 2015 |

CASIO

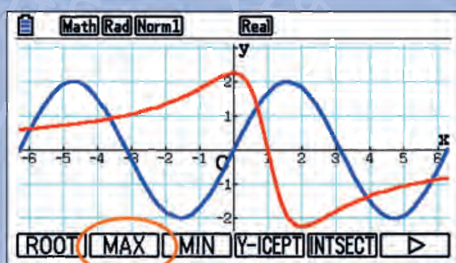
# Tien redenen om voor de CASIO *fx*-CG20 te kiezen...

## 2. Direct snijpunten en extremen bepalen:

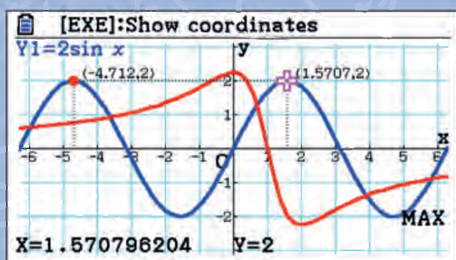



*Kies Intersect en je krijgt meteen een snijpunt. Druk op de cursor voor het volgende snijpunt.*




*Kies MAX en krijg meteen het linker maximum.*




*Pijltoets naar rechts toont volgende maximum.*

In de CASIO *fx-CG20* Leerlingentest werden topmerken grafische rekenmachines met elkaar vergeleken. De leerlingen waren er snel uit: de CASIO *fx-CG20* is uniek in prestaties en daarmee superieur. In deze en in de volgende uitgaven van Euclides publiceren wij de 10 voordelen die het meest genoemd werden in de CASIO *fx-CG20* Leelingentest. Kijk, vergelijk en oordeel zelf.



**De CASIO *fx-CG20* is CvTE goedgekeurd voor het centraal examen 2016 en daarna.**

## Uw leerlingen kiezen voor de CASIO *fx*-CG20

Méér informatie of workshop aanvragen? Bel +31 (0)20 545 10 70 – e-mail: educatie@casio.nl – www.casio-educatie.nl

# GETAL& RUIMTE

## NEEMT JE MEE

**Nieuw**
vanaf schooljaar 2015-2016:

Leerwerkboeken bij vmbo-bk!

11e editie Tweede Fase

10e editie klas 3 vmbo

**Vraag nu een beoordelings-exemplaar aan!**

## GETAL & RUIMTE: BEWEZEN KWALITEIT

***Getal & Ruimte*** **is de grootste wiskundemethode voor het voortgezet onderwijs. Al ruim 45 jaar toonaangevend!**

**Ga voor meer informatie naar www.getalenruimte.noordhoff.nl!**




## GETAL & RUIMTE:

- **staat midden in de belevingswereld van de leerling;**
- **biedt een heldere didactische structuur;**
- **biedt gevarieerde, uitdagende en motiverende opgaven;**
- **biedt RTTI-gecertificeerde toetsen;**
- **is afgestemd op de tussendoelen;**
- **biedt een optimale doorstroom naar de bovenbouw en het examen.**